الرياضيات البحتة

الجبر والهندسة الفراغية

الصف الثالث الثانوى

دليل المعلم

إعداد

أ/ كمال يونس كبشة

أ.د/ سمر عبد الفتاح لاشين **د/ أمل الشحات حافظ**

أ/ عبد الرحمن محمد عمر

شركة سقارة للنشر

ش.م.م



الطبعـة الأولى ٢٠١٦/ ٢٠١٧

رقم الإيـداع ٨٧٠٦ / ٢٠١٦

الرقم الدولى 9 - 034 - 706 - 977 - 978

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

المعلم الفاضل........

المعلمة الفاضلة ....

يسرنا أن نقدم هذا الدليل لمعلمى مادة الرياضيات للصف الثالث الثانوى (علمى) آملين الاستعانة منه فى اعداد وتحضير الدرس وتنفيذها كاحد المصادر التى تساعد تحقيق النتائج المرجوه.

ونحن نقدم لك هذا الدليل ليكون مرشدًا فى تخطيط وتنفيذ الدروس بما يتلائم مع مستويات الطلبة والطالبات ويساعد على تنمية مهارات التفكير العلمى وفى محاولة لأن يمتزج التعليم بالمتعه والتشوق وذلك بالاعتماد على اساليب التعلم الحديثة.

ونحن اذا نضع هذا الدليل بين يديك أيها المعلم الفاضل، فإننا نقدم أمثلة لا يجب الوقوف عليها فقط، بل نعدها منطلقًا لتنمية خبراتك وابراز قدراتك الابداعية.

فلسفة مناهج الرياضيات للمرحلة الثانوية «القسم العلمى»:

من المهم تحديد الفلسفة التى يمكن تطوير مناهج الرياضيات فى ضوئها، والتى تنبثق من فلسفة التربية لمواجهة التحديات المستخدمة على مجتمعنا.

وحيث إن الرياضيات وسيلة مهمة لإعداد المتعلم لمواجهة مشكلات بيئته المتنوعة والإسهام فى حلها، بالإضافة إلى إعداده لمواجهة تحديات عديدة عالمية وإقليمية ومحلية، الأمر الذى يحتم تنمية أنماط متعددة من التفكير لدى المتعلم وتنمية مهاراته فى حل المشكلات، وتنمية الحس البحثى لديهم وتنمية العديد من القيم والاتجاهات وأوجه التقدير التى تجعله يتصدى للسلبية الفكرية ويقبل المخاطر والمشاركة الايجابية والسعى إلى تعليم ذاته والوصول إلى المعرفة الرياضية من خلال مصادرها الأصلية وتوظيفها فى نمذجة المشكلات المحلية والعالمية والتوصل إلى حلول إبداعية لها، هذا بالرضافة إلى إبراز دور الرياضيات فى خدمة المجتمع والإسهام فى تطويره وحل مشكلاته.وأيضا دورها فى خدمة العلوم الأخري وتقدمها، بالإضافة إلى تقديم الأساسيات الرياضية اللازمة للطلاب عند دراستهم الجامعية مع جعل المناهج مرنة تسمح بحرية الاختيار مراعاة للفروق الفردية مع تفعيل استخدام التقنيات الحديثة فى تعليم وتعلم الرياضيات.

ونورد فيما يلى أهم منطلقات فلسفة مناهج الرياضيات:

- تقدير دور العلماء والإشارة إلى الرواد المعاصرين، الذين أسهموا فى نظرياتها وتطبيقاتها، وتأكيد أن الرياضيات علم فكر يسهم فى التكامل الحضارات، بما فى ذلك ما أسهمت وتسهم به الحضارات المصرية والعربية والإسلامية.

- ينبغى أن يكون لتعليم الرياضيات دور مجتمعى بمعنى اهتمام مناهج الرياضيات بالمساهمة فى معالجة بعض قضايا المجتمع.

المقدمة

- ينبغى أن تكون هناك رياضيات للجميع فى شكل مقررات تعالج بمستويات مختلفة تتفق مع تنوع واختلاف أهداف تعليم الرياضيات لمختلف الطلاب، خاصة فى إطار أن التعليم الآن جماهيرى ملزم لاستيعاب جميع الطلاب فى مرحلة الإلزام وأن نسبة كبيرة منهم تواصل التعليم حتى نهاية المرحلة الثانوية.

- تسهم الرياضيات كأحد علوم التكنولوجيا فى تطورها حيث ترتبط مناهجها بقضايا واحتياجات الأجيال الحالية ومحاولة التنبؤ باحتياجات الأجيال اللاحقة، بما يعطى الطلاب دوافع نحو دراسة مادة الرياضيات.

- تدريس موضوعات متقدمة فى المراحل الأولى من التعليم، مع نمو دراستها فى المرحلة الثانوية وما بعد ذلك، والتقليل من التعليم الشكلى للرياضيات

فى المستوى العام (غير المتخصص) ويشار بوجه خاص إلى دراسة الاحتمال والتوبولوجى والتحويلات الهندسية والنمذجة الرياضية والمنطق الرياضى والوياضيات الحيوية... ألخ والطرق العددية لما لها من أهمية فى حل مشكلات الرياضيات باستخدام الحاسب الآلى.

- هناك مستويات وقدرات متفاوتة بين المتعلمين لابد أن تقدم مقررات مختلفة لفئات المتعلمين.

- إرساء القدرة على التفكير النقدى المنهجى، وتنمية الرغبة فى البحث ومهارة التفكير المنطقى لدى الطلاب فى كافة الصفوف الدراسية، وذلك للتأكد من اكتسابهم مهارة التفكير التحليلى والقدرة على حل المشكلات وممارسة العمل الإبداعى الخلاق.

- تسهم الرياضيات التطبيقية بفروعها المختلفة فى حل العديد من المشكلات الحياتية الهندسية، والطبية،....إلخ.

أسس بناء مناهج الرياضيات:

تعتمد عملية بناء مناهج الرياضيات وتنظيمها على عدة أسس البعض منها يتعلق بالتطورات العلمية وتكنولوجية الاتصالات بصورة عامة وتكنولوجيا التعليم بصورة خاصة، والبعض الآخر يتعلق بفلسفة المجتمع وحاجاته وحاجات أفراده واتجاهاتهم.

ويمكن تصنيف هذه الأسس فى أربع مجالات رئيسه على النحو التالى:

أولًا: الأسس العلمية:

تستند عملية بناء مناهج الرياضيات إلى مجموعة من الأسس العلمية منها:

- البناء على ما تم دراسته من معارف ومهارات رياضية بالمرحلة السابقة.

- أن الرياضيات علم قائم بذاته له مفاهيمه وتعميماته وحقائقه ونظرياته ومهاراته فى بناء متكامل، وهو علم متطور ومتنامى.

- أن الرياضيات ذات طبيعة تراكمية تبدأ بالخبرات المحسوسة ثم شبه المحسوسة حتى تصل إلى الخبرات المجردة.

المقدمة

- اعتبار الرياضيات أداة ووسيلة تكامل وتربط مع العلوم الأخرى.
- إسهام محتوى الرياضيات فى تحقيق الأهداف المنشودة من تدريس الرياضيات وأن يراعى فى مفرداته أن تكون فى مستوى المرحلة التعليمية.
- - تأكيد مناهج الرياضيات على الإهتمام بالمفاهيم وكيفية استقرائها واتقان المهارات الخاصة بها.

ثانيًا: الأسس التربوية:

تستند عملية بناء مناهج الرياضيات إلى مجموعة من الأسس التربوية منها:

- اعتبار الرياضيات لغة تواصل وأسلوب تفكير تتمثل فى رموزها ومصطلحاتها وأشكالها الهندسية والجداول والرسوم البيانية، وأفكارها.
- إعداد أهداف لتعليم الرياضيات بقصد أن تسهم فى إعداد المواطن المصري المتميز الذى يمتلك المعارف وأنماط التفكير الملائمة لمعايشة معطيات وتحديات المرحلة الراهنة والمستقبلية.
- تأكيد مناهج الرياضيات على الأنشطة التى تستخدم فيها الرياضيات مثل التجارة والسياحة والتربية الرياضية وغيرها بحيث تكون الرياضيات علما تطبيقيًا.
- تأكيد مناهج الرياضيات على الإهتمام بأساليب التفكير وأنماطه المختلفة.
- تأكيد مناهج الرياضيات على الاهتمام باستخدام الاستراتيجيات التدريسية الفعالة المتنوعة.
- الاهتمام باستخدام التكنولوجيا الحديثة فى التدريس.
- تشجيع الطلاب على الاكتشاف والاستقراء والابتكار والتعرض لمواقف حياتية جديدة.
- تنمية اتجاهات إيجابية نحو دراسة مادة الرياضيات وتعلمها من خلال خلق دافعية ذاتية يدعمها ربراز العنصر الجماعى والثقافى والنفعى للرياضيات.

ثالثًا: الأسس النفسية:

تستند عملية بناء مناهج الرياضيات إلى مجموعة من الأسس النفسية منها:

- طبيعة المتعلم وخصائصه العامة التى يشاركه فيها غيره من المتعلمين.
- العوامل المؤثرة فى نمو الفرد كالوراثة والبيئة والجوانب الاجتماعية والثقافية.
- خصائص ومتطلبات مرحلة النمو بالمرحلة الثانوية وتداخلها وتكاملها مع المراحل الأخرى.
- حاجات المتعلم ودوافعه ومتطلبات نموه وميوله واستعدادته واتجاهاته النفسية ومهاراته بحيث تتنوع مجالات الخبرة التى تقدم له.

رابعًا: الأسس الاجتماعية:

تستند عملية بناء مناهج الرياضيات بالمرحلة الثانوية إلى مجموعة من الأسس الاجتماعية منها:

- الرياضيات لا غنى عنها لتعايش الفرد مجتمعه.
- الرياضيات علم وفكر يسهم فى تكامل الحضارات بما فى ذلك ما أسهمت وتسهم به الحضارة المصرية والعربية.
- حاجة المجتمع إلى العمالة المدربة لسوق العمل ، والمسلحة بالتفكير الرياضى.
- استثمار الثروة البشرية (الطلاب) فى بناء قاعدة تنموية شاملة.
- الاهتمام بالقيم والمبادئ الخاصة بالمجتمع.
- الاهتمام بالأدوار المختلفة لفئات الشعب فى التنمية الشاملة.

أهمية الدليل:

يأتى دليل المعلم موازيًا ومكملًا لكتاب الطالب بهدف:

- تزويد المعلم بخلفية ضرورية ولازمة عن الأفكار التى تكمن وراء بنية الكتاب المدرسى.
- توضح للمعلم الاستراتيجيات التدريس المتنوعة التى يمكن أن يستخدمها اثناء شرح الدرس.
- توضح للمعلم الخطوات والاجراءات اللازمة التى تساعده فى تنفيذ الدرس.
- كما يبرز الدليل جانب هام من أساليب التقويم المختلفة التى تراعى الفروق الفردية بين الطلاب.

كيف تستخدم هذا الدليل؟

لقد حاولنا أن يكون هذا الدليل وافيًا بجميع العناصر التي قد تحتاجها لتدريس هذا المقرر وسيكون أمامك صورة من صفحات كتاب الطالب فى كل درس، مما يساعدك على ربط توجيهات الدليل ما يراه الطالب فى كتابه، ومما لا شك فيه أن هذا يزيد من فائدة الدليل بالنسبة لك، إلى جانب الصورة المصغرة من صفحة كتاب الطالب تتضمن صفحة المعلم للعناصر التالية بالنسبة لكل وحدة وكل درس.

(١) مقدمة الوحدة: وتوضح عدد من المعلومات المرتبطة بالوحدة ودروسها ومنها مخرجات التعلم وزمن التدريس والمصطلحات الأساسية ومهارات التفكير، كما توضح المقدمة وسائل ومصادر التعلم وطرق التدريس المقترح استخدامها وأخيرًا طرق التقويم.

(٢) دروس الوحدة: فى هذا الجزء يتم تناول تفاصيل كل درس من دروس الوحدة وتشمل هذه التفاصيل:

- خلفية: حيث يتم خلالها الربط بين المعلومات السابقة لدى الطالب والمعلومات الجديدة فى الدرس.
- مخرجات الدرس: حيث يتم خلالها استعراض مخرجات التعلم المرجو تحقيقها فى الدرس وهى مصاغة بصورة اجرائية قابلة للملاحظة والقياس.
- المفردات الاساسية: حيث يتم توضيح عدد من المصطلحات التي سيتم تناولها فى الدرس.
- المواد التعليمية المستخدمة: يتم الاشارة إلى الوسائل المعينة التى يمكن للمعلم استخدامها فى شرح وتحقيق اهدافه اثناء عملية التعليم والتعلم.

المقدمة

- ❑ طرق التدريس المقترحة: يوضح هذا الجزء مسميات عدد من طرق التدريس التى يمكن للمعلم توظيفها اثناء الحصة وتتنوع هذه الطرق من درس لآخر فهناك العديد من طرق التدريس التى يمكن للمعلم استخدامها أثناء عرض المحتوى ومن هذه الطرق: المحاضرة - التعلم التعاونى - العصف الذهنى- الحوار والمناقشة - حل المشكلات - الاكتشاف.

ما الواجب معرفته عن طرق التدريس:

- ❑ المفهوم - خطوات التنفيذ- متطلبات التنفيذ- المميزات- العيوب أو صعوبات التنفيذ.

كيف يتم اختيار طريقة التدريس المناسبة:

- ❑ يتم اختيار طريقة التدريس فى ضوء مخرجات التعلم المستهدفة والمحتوى وخصائص الطلاب وفقًا للمرحلة العمرية والتعليمية والوقت المتاح.

أى طرق التدريس أفضل:

- ❑ لا توجد طريقة تدريس بعينها هى الأفضل ولكن افضل الطرق هي التي تناسب الطالب والموقف التعليمى وتساعد فى تحقيق الأهداف المرجوة.

نماذج طرق التدريس:

التعلم التعاونى :

- ❑ اسلوب تعلم يتم فيه تقسيم الطلاب إلى مجموعات صغيرة متجانسة أو غير متجانسة وفقًا للهدف أو المهمة التي سيكلف بها افراد المجموعة ويقوم افراد المجموعة بالتعاون فيما بينهم لإنجاز المهمة المكلفة بها، وتهدف هذه الطريقة إلى تنمية روح التعاون بدلًا من التنافس وتشجيع روح الفريق.

العصف الذهنى:

- ❑ يتم خلال الموقف التعليمى تحديد موضوع أو قضية أو سؤال، ويُطلب من الطلاب استدعاء أكبر قدر من المعلومات والأفكار أو الإجابات أو الحلول المرتبطة بتلك القضية أو هذا الموضوع؛ وذلك وفق قواعد متفق عليها، وتتمثل فى تسجيل الأفكار كافة وعدم النقد أو التقييم لأى فكرة لتشجيع الجميع على المشاركة الإيجابية؛ وبالتالى توليد اكبر قدر من الأفكار العادية أو المبتكرة، وبعد الانتهاء من عملية استدعاء الأفكار يتم مناقشتها للوصول إلى أفضل حل أو إجابة أو فكرة وذلك باستبعاد الأفكار غير المرتبطة أو المكررة دون الإشارة التى صاحب تلك الفكرة، ويمكن تلخيص خطوات العصف الذهنى فى أربع خطوات أساسية هى:
  - ✳ الإعداد والتهيئة : للموضوع الذى سيتم استدعاء الأفكار بشأنه.
  - ✳ طرح الموضوع : التأكد من وضوح الموضوع بالنسبة للجميع.
  - ✳ توليد الأفكار: بمشاركة كافة الطلاب.
  - ✳ تقويم الأفكار: حذف المكرر أو غير المرتبط والاتفاق على افضل الأفكار أو الإجابات.

المقدمة

حل المشكلات:

- هي إحدى الطرق العلمية التى تهدف إلى الوصول إلى نتائج او اقتراح حلول لمشكلة محددة تمثل عائقًا أو تحديًا للطلاب، تهدف هذه الطريقة إلى تدريب الطلاب على اتباع الخطوات العلمية أو التفكير العلمى لمواجهة مشكلة معينة، تعتمد تلك الاستراتيجية على تنفيذ عدد من الخطوات منها تحديد المشكلة تحديدًا دقيقًا وكاملًا، والبدء فى جمع معلومات عن تلك المشكلة والحقائق المرتبطة بها، فرض فروض تمثل الحلول الممكنة لتلك المشكلة، ويتم اختبار تلك الفروض لاختيار أيها ساهم فى حل المشكلة، وفى الختام استخلاص النتائج وتقديم الحلول الممكنة؛ ومن ثم يمكن تعميم تلك النتائج فى مواقف أخرى مشابهة للمشكلة التى تم دراستها.

الحوار والمناقشة:

- تمثل تلك الطريقة إحدى الطرق اللفظية، ويمكن تعريف طريقة المناقشة بأنها حوار منظم يعتمد على تبادل الآراء والأفكار بين المعلم والطلاب أو بين الطلاب بعضهم البعض، وتهدف هذه الطريقة إلى تنمية مهارات التفكير لدى الطلاب والتدريب على عرض الأفكار مدعومة بالدليل على صحتها، فضلاً عن الالتزام بآداب الحوار والمناقشة كإحدى المهارات الاجتماعية الواجب تنميتها لدى الطلاب.
- تتمثل خطوات المناقشة فى تحديد المعلم للهدف من المناقشة، وتقسيم هذا الهدف إلى عدة أفكار فرعية أو عدد من الأسئلة المطلوب الاجابة عنها، ويتم وضع قواعد لإدارة وتنظيم المناقشات، ومن أمثلة تلك القواعد إتاحة الفرصة للطالب لعرض الفكرة كاملة ومناقشة ونقد الفكرة دون الإساءة أو التقليل من شأن صاحب الفكرة، وهكذا ويحرص المعلم على التزام الطلاب بتلك القواعد ليساعدهم على التوصل إلى الأفكار وربط المفاهيم واستخلاص الاستنتاجات والتوصيات المرتبطة بالهدف الذى تم تحديده، ومن خلال تحديد نتيجة لكل فكرة فرعية يتم التوصل إلى نتيجة للقضية أو المشكلة الأساسية.

التعلم بالاكتشاف :

- هى عملية تفكير تعتمد على أن يقوم الطالب باسترجاع وتنظيم المعلومات السابقة لديه وإعادة صياغتها بشكل يُمكِّن من استخدامها فى مواقف جديدة، ويُعرف التعلم بالاكتشاف بأنه التعلم الذى يحدث نتيجة لمعالجة الطالب لمعلومات وتركيبها وتحويلها للوصول إلى معلومات جديدة من خلال اكتشاف أفكار أو حلول يصل إليها الطلاب بأنفسهم؛ مما يشجعهم على مواصلة عملية التعلم .

التعلم بالاكتشاف له أنواع تعتمد على درجة التوجيه الذى يقدمه المعلم ومن تلك الأنواع:

- الاكتشاف الموجه: والذى يوفر فيه المعلم بعض التعليمات التى تضمن مساعدة الطلاب على النجاح فى المهمة.
- الاكتشاف شبه الموجه: وفيه يقدم المعلم بعض التوجيهات العامة دون أن يتقيد بها الطالب.
- الاكتشاف الحر: فيه يواجه الطالب المشكلة بنفسه دون أى توجيهات من المعلم، ويطلب منه الوصول إلى الحل وصياغة الفروض وتصميم التجارب وتنفيذها.

المقدمة

اجراءات الدرس:

أ) **التهيئة:** وذلك من خلال مناقشة العمل التعاونى أو بند "فكر وناقش" الوارد فى بداية الدرس، ومن المعروف أن توافر الدافعية فى التعلم لدى الطلاب أمر لازم بل حتمى لضمان حُسن سير الدرس وإيجابية الطلاب، وبالتالى تتحقق الأهداف المنشودة. ويجب ألا يطغى زمن تهيئة الطلاب على الزمن المخصص لباقى أنشطة الدرس، وعادة لا يزيد زمن تهيئة الدرس عن عشر دقائق.

ب) **تعلم:** بعد التهيئة - وفى ترابط وسلاسة - يدخل المعلم إلى خطوات عرض الدرس، فيبدأ فى تنفيذ الأنشطة الواردة فى هذا الجزء من الدليل وهى ترتبط ارتباطًا وثيقًا بصفحة كتاب الطالب، وأن الربط بين ما يحدث فى مرحلة تهيئة الطلاب وبين بداية الدرس أمر مهم جدًّا، حتى لا تفقد التهيئة أهميتها ودورها فى نجاح الدرس وتحقيق أهدافه.
ويتخلل هذا الجزء استعراض للأمثلة والتدريبات كافة وكذلك الأنشطة الموضحة ، ويتاح لك فى هذا الجزء مزيد من الطرق لاستنتاج القوانين او العلاقات وعدد من التمارين الإثرائية التى يمكن استخدامها فى حالة توافر زمن متاح أو للطلاب المتفوقين، علمًا بأن هذه التمارين مجاب عنها.

جـ) **التقييم والتدريب:** ويشمل هذا البند جوانب مهمة هى "التقييم المستمر" ويشمل إجابات لما ورد فى بند "حاول أن تحل" أو يشمل أسئلة شفهية أو تحريرية خلال عرض الدرس، الجانب الآخر هو" التقييم و التدريب"، ويشمل هذا البند إجابات ما ورد فى بند "تمارين" و الجانب الثالث هو "التقييم"، ويشمل أسئلة شفهية أو تحريرية تساعدك على التأكد من تحقيق أهداف الدرس، ومدى استفادة طلابك مما تعلموه، وذلك جنبًا إلى التمارين العامة والاختبارات الواردة فى نهاية كل وحدة.

د) **تمارين إثرائية:** يقدم الدليل فى نهاية كل درس أنشطة إثرائية للطلاب المتفوقين، ولكن حذار أن تعلن أن هذا النشاط خاص بالطلاب المتفوقين ولا تقسم الطلاب فى الفصل إلى مجموعات وفقًا لمستوياتهم، فهذا النشاط خاص بالمعلم ليواجه الفروق الفردية بين طلابه، يمكنك أن تستقطع وقتًا فى ذات الدرس للقيام بهذه الأنشطة الإثرائية، وأحيانًا يكلف بها الطلاب بوصفها نشاطًا خارجيًّا يقومون به بعد الدرس، وقد يعرضون عليك ما أنجزوه فى هذه الأنشطة خارج وقت الحصة، أو قد تُراجِع معهم إنجازاتهم فى بداية الحصة التالية، وقبل التهيئة الجديدة (يتوقف ذلك على نوع تلك الأنشطة، وما تحتاجه من زمن لمتابعتها)، ونشير هنا إلى أنه عند تكليف أى طالب بنشاط ما يجب أن تتابع إنجازه فيه، حيث إن عدم توفر ذلك يؤدى إلى تكاسلهم بل إهمالهم القيام بأى نشاط إثرائى.

هــ) **الأخطاء الشائعة:** يتم استعراض عدد من الصعوبات التى تواجه الطلاب نتيجة بعض الأخطاء المتوقع منهم الوقوع بها، وتختلف هذه الأخطاء باختلاف الموضوع والوسائل المستخدمة وكذلك المستوى الأكاديمي للطلاب.

و) **ملخص الوحدة والاختبار التراكمى:** تنتهي الوحدة بعرض ملخص لدروس الوحدة وتمارين عامة، وكذا اختبار تراكمى للوحدة علمًا بأن الدليل يوفر لك إجابات لكل منهما.

المقدمة

الجانب النظرى لدليل المعلم

والآن عزيزى المعلم كى تقوم بدورك على أكمل وجه سوف نتناول عرضًا موجزًا للجانب النظرى للدليل عن النقاط التالية:

- ❏ تطبيقات الرياضيات .
- ❏ تصنيف أهداف تدريس الرياضيات.
- ❏ معايير ومؤشرات الصف الثانى الثانوى.
- ❏ خصائص النمو لطلاب المرحلة الثانوية.
- ❏ بناء جدول مواصفات الاختبار التحصيلى.
- ❏ تنظيم محتوى مادة الرياضيات فى الصف الثالث الثانوى.
- ❏ إستراتيجيات عامة للتدريس الناجح.
- ❏ الاتجاهات الحديثة في تعليم الرياضيات.
- ❏ إدارة وتنظيم بنية التعلم النشط.

طبيعية الرياضيات

من أحد ركائز بناء المنهج مراعاة طبيعة المادة كأحد المؤثرات على مكوناته من حيث الأهداف والمحتوى وطرق التدريس والأنشطة التعليمية واساليب التقويم، لذا من الضرورى توضيح الفرق بين طبيعة الرياضيات كعلم وكمادة دراسية. لاستيعاب طبيعة الرياضيات لابد من إدراك مراحل تطور الرياضيات عبر العصور المختلفة وفهم التغيرات التى تحدث فى طبيعة الرياضيات من عصر إلى آخر، ويمكن التعرف على طبيعة الرياضيات فى ثلاثة فترات زمنية تمثل تاريخ تطور الرياضيات وهى:

الفترة الأولى منذ نشأة الرياضيات وحتى قبل ظهور الحضارة الاغريقية، واتسمت طبيعة الرياضيات فى هذه الفترة بكونها ذات طبيعة عملية لم تكن تعتمد على البرهان المنطقى وكانت تعتمد على الحالات الخاصة فقط .

الفترة الثانية: منذ نشأة الحضارة الاغريقية حتى القرن التاسع عشر، تميزت هذه الفترة ببداية النظام البديهى القائم على المنطق حيث يتكون هذا النظام من مجموعة بسيطة من المعرفات واللا معرفات والبديهيات والمسلمات ومنها تشتق النظريات ، وغلب على طبيعة الرياضيات فى هذه الفترة الطابع التجريدى واستخدام الرموز.

الفترة الثالثة : من القرم التاسع عشر حتى الآن حيث تم رفض فكرة الصدق المطلق التى غلبت على الفترة السابقة بل اصبح هذا الصدق نسبى ، وبدأ فى هذه الفترة استخدام لغة موحدة لجميع فروع الرياضيات واصبحت اكثر تجريدا وتعددت الانظمة الرياضية واصبح اسلوب الاستنباط الرياضى اسلوب عام فى جميع مجالات الرياضيات.

إن الرياضيات كعلم أو كمادة دراسية ذات طبيعة استدلالية أى الوصول إلى نتائج صادقة من خلال مقدمات مسلم بصدقها وفقًا لخطوات تحكمها قوانين المنطق، ومن خلال هذا الاستدلال يمكن اشتقاق النتائج والنظريات.

المقدمة

وتختلف الرياضيات كعلم عن الرياضيات كمادة دراسية باختلاف طريقة المعالجة واسلوب العرض ويمكن توضيح ذلك **كمايلى**:

- الرياضيات كمادة دراسية تحتوى على المفاهيم الاساسية لعلم الرياضيات ولكن بعد تبسيطها.
- الرياضيات كعلم هى بناء استدلالى يهدف إلى الوصول إلى النظريات بينما الرياضيات كمادة دراسية لاتهدف إلى اشتقاق الطالب لمعلومات رياضية جديدة مثلما يفعل العلماء.
- الرياضيات كعلم تتضمن المسلمات فى صيغة تجريدية بينما هذه المسلمات تقدم للطالب فى المادة الدراسية بصورة واضحة ومفهومه ومبسطة..

الرياضيات والعلوم الأخرى

الرياضيات علم حى دائم التطور، تزداد أهميته إلى درجة القول بأن الرياضيات أصبحت مركز التطور الحضارى والتكنولوجي المعاصر والمستقبلى، وذلك لأن تطبيقاتها وأنماطها أصبحت تغطى كل أنواع الأنشطة .. فى الفنون والأداب فى سوق العمل ومجالات الترويح ... فى الإستراتيجيات العسكرية وقرارات السياسيين وفى الإنتاج والخدمات. الرياضيات كانت ومازالت نشاطًا يعبر عن ثقافة إنسانية تتوسع من داخلها لتحل مشكلات من خارجها، وتكتشف من خلال نمذجه وتجريد مواقف من خارجها علاقات تثريها من داخلها، لم يعد نشاط الرياضيات قاصرًا على العدد والشكل الذين كانا مصدرى إلهامها، بل يمتد إلى نشاطها لدراسة العلاقات والأنماط وإلى اشتقاق نتائج مع مقدمات، ولم تعد الرياضيات مجرد أرقام ورموز يفهمها قلة من الناس، بل لغة يتواصل بها ويتعامل معها غالبية البشر، ويعمل منطقها على تيسير عمل الحاسبات وبث واستقبال المعلومات والتواصل بها من خلال الألياف الضوئية، تعددت مجالات وفروع الرياضيات فى بنى مجردة مثل الزمرة (Group) والحقل (Field) وفضاء المتجه (Vector space) لها تمثيلاتها فى الفروع المختلفة.

ورغم كل التجريدات الرياضية فإن الرياضيات تنصت للطبيعة لترسم بها نماذج ينبثق منها وعنها حلول للمشكلات والرياضيات تتعامل مع المؤكدات ومع الاحتمالات واللايقينيات، مع مظاهر استاتيكية وأخرى ديناميكية .. وفوضوية تتعامل مع أشكال مثالية منتظمة وأخرى معقدة، مع أبعاد صحيحة وأخرى كسورية، وتسهم الرياضيات فى حل كثير من المشكلات والتحديات العملية والحياتية، من خلال تمثيلها أو نمذجتها علاقات بلغة الرياضيات ورموزها، يتم حلها ثم إعادة ترجمتها إلى أصولها المادية ، الرياضيات – مثلاً – تشرح وتفسر لنا ظواهر النمو فى الكائنات الحية وظاهرات التآكل من مواد إشعاعية (والتى تمثلها قوى أسية فى الجبر)، كما أن الرياضيات تقدم لنا نماذج عديدة للتصميمات المعمارية والصناعية، وتنظم لنا عمليات الأنشطة الخدمية والإنتاجية، وتتنبأ لنا بجدوى القيام بمشروعات جديدة، الرياضيات تصف لنا كيف تنساب الموسيقى ونغماتها الجميلة، الرياضيات تمدنا بأشكال هندسية يمكن أن تمثل وحدات التكوين لأشكال زخرفية ومصورات فنية جميلة

المقدمة

تنظيم محتوى الرياضيات فى الصف الثانى الثانوى (علمى):

يجرى تدريس الرياضيات فى الصف الثانى الثانوى (علمى) فى شكل وحدات دراسية موزعة مصفوفيًّا بين صفوف المرحلة الثانوية، وبين المجالات المعروفة: الأعداد والعمليات عليها، الجبر والعلاقات والدوال، الهندسة، وحساب المثلثات. ومن ناحية أخرى فإن المحتوى ينمو رأسيًّا (عبر الصفوف) وحلزونيًّا فى كل فرع، ويتوزع أفقيًّا (فى كل صف) بحيث يتضمن وحدات من فروع مختلفة تعكس- إلى حد ما- وحدة الفكر الرياضى. ويراعى فى جميع الحالات التناغم الرياضى لمتطلبات الوحدات على اختلاف انتماءاتها الفرعية ولخدمة العلوم الأخرى ذات الصلة.

تصنيف أهداف تدريس الرياضيات:

يواجه المعلم دائمًا بالسؤال الآتى «لماذا نعلِّم الرِّياضيات؟» أو ما الهدف منها، ان تدريس الرياضيات يهدف إلى تزويد الطالب بالمعارف الرياضية واكتساب المهارات المرتبطة بتلك المعارف وبالتالى توظيف واستخدام تلك المعارف والمهارات من خلال تكوين اتجاهات إيجابية نحو دراستها ، وبالتالى يمكن تلخيص اهداف تدريس الرياضيات إلى أهداف تتعلق :

- بمعرفة وفهم اساسيات مادة الرياضيات.
- بالتدريب على اساليب تفكير سليمة وتنميتها.
- باكتساب المهارات الرياضية (العقلية والنفس حركية)
- باكتساب اتجاهات موجبة وتنمية ميول واوجه التقدير نحو الرياضيات وعلماؤها.

هناك أكثر من طريقة للتعريف بتصنيف أهداف تعليم الرياضيات، أشهرها تصنيف الأهداف إلى:

(١) أهداف معرفية Cognitive تتمثل الأهداف المعرفية فى معرفة اساسيات المادة وفهم بنيتها وتركيبها والأسس النظرية لبعض النواحى التطبيقية حيث يساعد ذلك علي اكساب الطالب القدرة على تطبيق القواعد والنظريات فى المادة الدراسية أو فى مواقف حياتية كما تسهم معرفة تلك الاساسيات فى فهم اساسيات مواد دراسية اخرى.

(٢) أهداف وجدانيّة Affective تتعلّق بتقدير appreciation الرياضيات كعلم ومجال وأسلوب تفكير بشرى، وتقدير الرياضيين وإسهاماتهم، وتكوين ميول واتجاهات إيجابية نحو دراسة الرياضيات، ونحو دورها فى التقدُّم ونحو أساليبها فى التفكير ودقة لغتها فى الاتصال سواء بالرمز أو بالشكل البيانى.

(٣) أهداف نفسحركية Psychomotor يقصد بها تنمية المهارات العملية والعقلية، مثل الإنشاءات الهندسية، واستخدام أدوات ذات طابع رياضى هندسى أو حسابى أو حوسبى، المهارات العملية فى الرياضيات يغلب عليها الناحية الادائية وتسهم الناحية المعرفية بقدر أقل من الناحية اليدوية، بينما المهارات العقلية المتمثلة فى استخدام المفاهيم والمعارف فى حل المشكلات فيغلب عليها الناحية المعرفية التى تترجم بالمهارة اليدوية الى خطوات وخورازميات للحل.

المقدمة

إستراتيجيات عامة للتدريس الناجح

إستراتيجية التدريس: هى خطة تحركات المعلم فى تحقيق أهداف الدرس، مع ملاحظة أن الهدف الأساسى للتدريس والتعليم هو أن يتعلم الطالب. ويقاس نجاح الاستراتيجية بمدى كفاءتها فى أن يتعلَّم الطلاب ما يراد لهم أن يتعلموه، بغرض مساعدة الطلاب فى أن يبنوا بأنفسهم ويكتشفوا المعارف التى يتعلمونها فى ضوء النظرية البنائية Constructivism وتتضمن إستراتيجية التدريس الناجحة أن يقوم المعلم بالآتى:

- التقدُّم بمشكلة أو سؤال يثير انتباه الطلاب (وقد يكون قصة تاريخية).
- إعطاء فرصة للطلاب للمناقشة.
- توزيع العمل بين أعمال تعاونية فى مجموعات صغيرة تعمل تعاونيًّا، وأعمال فردية يفكر فيها كل طالب بنفسه، وأعمال جماعية يحدث فيها تفاعلات بين المعلم والطلاب وبين الطلاب أنفسهم.
- فى نهاية كل مناقشة أو عمل تعاونى أو عروض من جانب بعض الطلاب يقوم المعلم بتلخيص واضح لما تم مناقشته أو حله متضمنًا الأساسيات: تعريفات، علاقات، منطوق نظريات لها براهين، إلخ.
- إعطاء الطلاب فرصًا داخل الفصل أو المنزل (واجبات) لاكتشاف بعض الخواص أو العلاقات بأنفسهم.
- تشجيع الطلاب على إعطاء حلول أو براهين بديلة.
- عند تدريس مفهوم أو علاقة ضمن عدة مفاهيم يعطى المعلم مثال ولا مثال على المفهوم أو العلاقة الجديدة .
- البعد عن التلقين أو سرد الحقائق وعرض الاجابات الجاهزة دون مشاركة فعالة من الطلاب.
- تنويع السلوكيات (أى طرق التدريس) فى الحصة الواحدة.
- الحرص على إعطاء رعاية خاصة فى فترة العمل الفردى أو فى المجموعات التعاونية للطلاب بطيئى التعلم أو من هم دون المستوى فى قدراتهم على التعلم، وكذلك الحال بالنسبة إلى الطلاب المتفوقين.
- تنويع الواجبات سواء داخل الفصل أو فى المنزل مع مراعاة الفروق الفردية- ليس من الضرورة أن يحل كل الطلاب جميع التمارين فى الكتاب خاصة بالنسبة إلى الطلاب «الضعاف»، فيُقدَّم لهم الحد الأدنى، ويُلاحظ تقدمهم حتى يصلوا إلى مستويات أفضل متدرِّجين فى الواجبات.
- تحديد بعض الساعات للمساعدة خارج الفصل فى مكتب المعلم أو فى المكتبة.
- مساعدة الطالب على أن يشعر بأنه يمكنه النجاح والتفوق فى هذا المقرر.

وسائط تعليمية عامة

الوسيط التعليمى هو مادَّة تعليمية مكتوبة أو مرسومة، أو صورة ثابتة أو متحرِّكة مُسجَّلة على أوراق أو شرائط أو أقراص مدمجة (CDs) أو مخزنة على كمبيوتر.

وتشمل الوسائط التعليمية الأدوات والأجهزة المستخدمة فى عرض واستخدام الموادِّ التعليميَّة والبرمجيات. وقد يكون الوسيط التعليميُّ ملصقًا أو بطاقاتٍ كرتونية أو قطعًا خشبيَّة أو بلاستيكية أو أجهزة لعرض شفافيات أو صور معتمة أو جهاز سينما أو حاسوبًا، وقد تكون موادَّ من الطبيعة أو مصنعة أو نماذج محاكاة لأشكال هندسية أو تجارب معمليَّة.

المقدمة

والأصل فى الوسيط التعليمى هو أن يستخدمه الطالب بنفسه ويمارس من خلاله عملًا تعليميًّا نشيطًا، لا أن يكتفى بمشاهدته سواء قام المعلم بتشغيله أو كان يعمل آليًّا، فالمهم مثلاً أن يعمل الطالب على الحاسوب hands on لاكتشاف علاقة رياضية أو تحقيق صحتها أو تمثيل بيانى لأحد الجداول مستخدمًا برنامج اللوحة الجدولية excelsheet أو رسم بعض الأشكال الهندسية باستخدام سلحفاة برنامج اللوجو (LOGO) أو البرامج الرياضية المتخصص مثل geogebra.

والمبدأ الذى نرتئيه هنا هو أن التكنولوجيا بصفة خاصة، والوسائط التعليمية المتعددة بصفة عامة، «حليفة وليست بديلة للمعلم»- بمعنى أن التكنولوجيا أداة يستثمرها المعلم فى تيسير عملية التعلم لا أن تحل محله.

معايير ومؤشرات الصف الثالث الثانوى (علمى)

المجال الأول: الأعداد والعمليات عليها

المعيار الأول: فهم الأعداد المركبة، وخواصها، وطرق تمثيلها

- يمثل العدد المركب ومرافقه بيانيًّا بنقاط (أزواج مرتبه) فى مستوى إحداثى
- يحدد المقياس والسعة للعدد المركب.
- يتعرف السعة الأساسية للعدد المركب.
- يتعرف الصور المثلثية للعدد المركب.
- يتعرف نظرية ديموافر وتطبيقاتها.
- يستنتج الجذور النونية لأى عدد مركب.
- يعبر عن جا ن i، جتا ن i بدلالة النسب المثلثية للزاوية ومضاعفاتها.
- يتعرف مفكوك جا i، وجتا i كمتلسلات.
- يستنتج قانون أويلر من خلال المتسلسلات.
- يتعرف ويطبق طرق التحويل بين الصور المختلفة للعدد المركب.
- يتعرف الجذور التكعيبية للواحد الصحيح.

المعيار الثانى: إجراء العلميات الحسابية (+، -، ×، ÷) على الأعداد المركبة

- يتعرف المقياس والسعة لحاصل ضرب عددين مركبين ولخارج قسمتهما.
- يجرى العمليات الأساسية على العدد المركب فى الصورة المثلثية.
- يحل تطبيقات على الجذور التكعيبية للواحد الصحيح.
- يستخدم الأعداد المركبة فى حل المشكلات الرياضية.
- يستخدم بعض برامج الحاسوب فى حل مشكلات رياضية تتضمن أعدادًا مركبة.
- يستنتج خواص عمليتى الجمع والضرب على الأعداد المركبة.
- يستنتج خواص عمليتى الجمع والضرب على الأعداد المركبة.
- يستنتج خواص العددين المترافقين.
- يستنتج خواص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

المقدمة

المجال الثانى: الجبر والعلاقات والدوال

المعيارالأول: استنتاج خواص العمليات على الأعداد المركبة

- ❑ يستنتج خواص عمليتى الجمع والضرب على الأعداد المركبة
- ❑ يستنتج خواص العددين المترافقين.
- ❑ يستنتج خواص الجذور التكعبية للواحد الصحيح

المعيار الثانى: تعرف مبدأ العد والتبادل والتوافيق، وتطبيقات عليها.

- ❑ يتعرف مبدأ العد (قاعدة الجمع)
- ❑ يتعرف العلاقة بين التباديل والتوافيق كأساليب وطرق للعد
- ❑ يستنتج قوانين ونتائج على التباديل والتوافيق.
- ❑ يستخدم التباديل والتوافيق فى حل مشكلات رياضية حياتية فى مجاللات مختلفة.

المعيار الثالث: تعرف نظرية ذات الحدين، وتطبيقات عليه

- ❑ يتعرف نظرية ذات الحدين بأس صحيح موجب.
- ❑ يستنتج الحد العام فى مفكوك ذات الحدين.
- ❑ يستنتج النسبة بين كل حد والحد السابق له فى مفكوك ذات الحدين.
- ❑ يوجد معامل أى حد فى مكفوك ذات الحدين وفقًا لرتبة هذا الحد.
- ❑ يوجد معامل أى قوة للمتغير س فى مفكوك (س+ص) ن
- ❑ يوجد الحد الخالى من س فى مفكوك (س + ص) ن
- ❑ يوجد معامل أكبر حد فى مفكوك ذات الحدين
- ❑ يوجد الحد الأوسط فى مفكوك ذات الحدين عندما ن عدد زوجى والحدان الأوسطان عندما ن عدد فردى.
- ❑ يستنتج علاقات بين التوافيق مستخدمًا مفكوك ذات الحدين
- ❑ يستنتج العلاقة بين مثلث باسكال ومعاملات مفكوك ذات الحدين، ويستنتج بعض الأنماط فى مثلث باسكال.
- ❑ يحل تطبيقات رياضية وحياتية متنوعة على نظرية ذات الحدين.

المعيار الثالث: فهم المصفوفات والمحددات، وخواصها، واستخداماتها

- ❑ يستنتج خواص المحددات.
- ❑ يحل مسائل متنوعة مستخدمًا خواص المحددات.
- ❑ يعين معكوس مصفوفة مربعة من الرتبة الثالثة باستخدام مصفوفة العوامل المرافقة.
- ❑ يحل معادلات خطية باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة.
- ❑ يتعرف المعادلات الخطية المتجانسة وغير المتجانسة.
- ❑ يعين مرتبة مصفوفة المعاملات ورتبة مصفوفة المعاملات الموسعة.
- ❑ يستنتج العلاقة بين مرتبة مصفوفة المعاملات ورتبة مصفوفة المعاملات الموسعة وإمكانية الحل.

المقدمة

المجال الثالث: الهندسة

المعيار الأول: فهم الهندسة والقياس فى بعدين وثلاثة ابعاد، وتطبيقاتهما فى رياضية وحياتية

- يتعرف النظام الإحداثى ذى الثلاثة أبعاد ويحلل المتجه فى الفراغ.
- يوجد المسافة بين نقطتين فى الفراغ وإحداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة فى الفراغ.
- يوجد المعادلة الكارتزية للكرة بدلالة إحداثيات المركز وإحداثيات نقطة على الكرة.
- يتعرف على المتجهات فى الفراغ من خلال:
- تمثيل المتجه بثلاثى مرتب.
- متجهات الوحدة الأساسية فى الفراغ $\overleftarrow{س} = (١، ٠، ٠)$ ، $\overleftarrow{ص} = (٠، ١، ٠)$، $\overleftarrow{ع} = (٠، ٠، ١)$.
- التعبير عن أى متجه بدلالة متجهات الوحدة الأساسية $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ع}$
- التعبير عن القطعة المستقيمة الموجهه فى الفراغ بدالة أحداثيات طرفيها.
- يتعرف حاصل الضرب القياسى وحاصل الضرب الاتجاهى لمتجهين فى المستوى والفراغ.
- يتعرف خواص حاصل الضرب القياسى والاتجاهى لمتجهين فى المستوى والفراغ.
- يتعرف النظام الإحداثى ذا الثلاثة أبعاد ويحلل المتجه فى الفراغ.
- يوجد المسافة بين نقطتين فى الفراغ.
- يوجد إحداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة فى الفراغ.
- يوجد المعادلة الكارتزية للكرة.
- يتعرف المتجهات فى الفراغ.
- يمثل متجهًا ثلاثيًّا مرتبًا.
- يحدد متجهات الوحدة الأساسية فى الفراغ.
- يعبر عن قيمة أى متجه قيمة بدلالة متجهات الوحدة الأساسية.
- يعبر عن نقطة سينية موجهة فى الفراغ بدلالة إحداثيات طرفيها.

المعيار الثانى: تعرف الخطوط المستقيمة والمستويات فى الفراغ والنظريات عليها، وبعض التطبيقات فى مواقف رياضية

- يوجد متجه اتجاه الخط المستقيم فى الفراغ.
- يوجد المعادلة البارامترية للمستقيم فى الفراغ والمعادلة الاتجاهية للمستقيم فى الفراغ.
- يوجد المعادلة المتماثلة الكارتيزية للمستقيم فى الفراغ.
- يوجد المعادلة العامة للمستوى فى الفراغ.
- يوجد المعادلة القياسية للمستوى فى الفراغ.
- يتعرف الزاوية بين مستويين فى الفراغ.
- يستنتج شرط تعامد مستويين فى الفراغ.
- يستنتج شرط توازى مستويين فى الفراغ.

- يوجد معادلة خط تقاطع مستويين فى الفراغ.
- يعين المسافة بين نقطة ومستقيم فى الفراغ.
- يوجد المسافة بين نقطة ومستوى باستخدام حاصل الضرب القياسى وباستخدام الصورة الكارتيزية.
- يعين المسافة بين مستويين متوازيين.

الاتجاهات الحديثة فى تعليم الرياضيات

هناك عدة اتجاهات حديثة لتعليم وتعلم الرياضات نورد منها ما يلى:

تعليم الرياضيات من أجل حل مشكلات البيئة والمجتمع: ويدعو هذا الاتجاه لأن يكون للرياضيات دورًا فى معالجة قضايا ومشكلات المجتمع، وأن ترتبط المعرفة الرياضية بالخبرات الحياتية والبيئية للطلاب.

تعليم الرياضيات من أجل تنمية انماط التفكير وأسلوب حل المشكلات: يعد هذا الاتجاه من الاتجاهات المفضلة فى تعليم الرياضيات، وقد نبع هذا الاتجاه نتيجة للتغير السريع فى المعارف والأساليب التكنولوجية واستخداماتها، ولذا أصبحت المعرفة فى حد ذاتها ليست هى الهدف الاسمى بل طرق الحصول عليها، وهو ما يتمثل فى أنماط التفكير المختلفة وأسلوب حل المشكلات والتى يمكن تنميتها من خلال تعليم وتعلم الرياضيات.

تعليم الرياضيات من أجل تنمية الإبداع: للرياضيات دور هام فى تنمية الإبداع لدى المتعلمين لما لها من طبيعة تساعد على ذلك، لأن الرياضيات بمضمونها تعتمد على إدراك العلاقات للوصول إلى النتائج والنظريات وغيرها من الإبداعات، وجوهر الإبداع هو إدراك علاقات جديدة تؤدى إلى تنوع من الحلول للمشكلة الرياضية المطروحة. لهذا اعتبر التربويون أن تنمية الإبداع هدف أساسى من أهداف تعليم الرياضيات.

تعليم الرياضيات للفئات الخاصة: أدى الاهتمام بحاجات المتعلم، وضرورة تعليمه بقدر ما تسمح به استعداداته وقدراته إلى ظهور اتجاه نحو تعليم الرياضيات للفئات الخاصة (بطيئ التعلم - المتفوقون - المعاقين) حيث لكل من هذه الفئات استعداداته وقدراته وإمكاناته، وأصبح من الضرورى تصميم مناهج للرياضيات لكل فئة من هذه الفئات حتى يمكن أن تتعلم كل فئة بقدر ما لديها من خصائص.

تعليم الرياضيات فى ضوء مفهوم العولمة: نتيجة للتقدم الهائل فى تكنولوجيا الاتصال، لم يعد للبعد الجغرافى تأثيرًا فى عزل الدول عن بعضها البعض، وأصبح العالم كقرية صغيرة متشابكة الأطراف، وأصبح للمشكلات بمختلف مجالاتها صفة العالمية، حيث لم تعد دولة واحدة بإمكاناتها قادرة على مواجهة هذه المشكلات، وبالتالى لم يعد مبدأ الاكتفاء الذاتى صالحًا للتطبيق في ظل هذه الظروف فحل محله مبدأ الاعتماد المتبادل الذى يدعو إلى إنفتاح دول العالم على بعضها البعض، لنعيش فى سلام عالمى وتعاون مشترك من أجل خير الإنسان، وهذا ما يؤدى إلى إتساع بيئة الإنسان من المحلية إلى العالمية. وهذا ما يدعو إلى أن تكون مناهج الرياضيات التى يدرسها المتعلم تساعد فى إعداده لذلك.

تعلم الرياضيات ذاتيًا : ادى الانفجار المعرفى إلى ظهور الحاجة إلى التعلم الذاتى وظهرت عدة أساليب للتعلم الذاتى من أهمها التعلم بالمراسلة والموديولات التعليمية وباستخدام الحاسب الآلى.

إلا أن تعلم الرياضيات باستخدام الحاسب الآلى نال اهتمامًا كبيرًا من قبل التربويين والباحثيين فى مجال تعليم وتعلم الرياضيات وظهرت العديد من البرامج بالعربية والإنجليزية لتعليم الرياضيات باستخدام الحاسب الآلى.

تعليم الرياضيات باستخدام الإنترنت: الإنترنت هو منظومة عالمية تربط مجموعة من الحاسبات الآلية بشبكة واحدة والإنترنت له عدة مميزات دفعت التربويين إلى المناداه بضرورة استخدامه وهى:

المقدمة

- الوفرة الهائلة فى مصادر المعلومات ومنها: الكتب الالكترونية، الدوريات، قواعد البيانات، الموسوعات، المواقع التعليمية
- الاتصال غير المباشر وذلك من خلال البريد الالكترونى، والبريد الصوتى.
- الاتصال المباشر وذلك من خلال التخاطب الكتابى المباشر، والتخاطب الصوتى والتخاطب بالصوت والصورة.

تعليم الرياضيات المزود بالحاسوب: يتنوع الاستخدام التعليمى للحاسوب من مساعدة الطلاب على تعلم القواعد الأساسية إلى تعلمهم لاستراتيجيات التفكير المعقد، والحاسوب أداة فعالة للطالب المتوسط القدرة، والطالب المعاق وللطالب المتفوق، ويأتى ذلك من قدرته على التكيف التعليمى لمواجهة الاحتياجات المتنوعة للطلاب ذوى القدرات المختلفة، وقد أثبتت البحوث أن التعليم المزود بالحاسوب (CAI) يوفر الجهد والوقت فى التفكير وفى حل المشكلات، كما أن الحاسوب وسيلة فعالة فى تشخيص وعلاج الأخطاء الرياضية لدى الطلاب.

خصائص نمو طلاب المرحلة الثانوية

إن معرفة خصائص النمو لطالب المرحلة الثانوية يساعدنا على معرفة حاجاته، وتعرف مدى نمو الطالب بالنسبة لمتوسط اقرانه، ويعيش طالب المرحلة الثانوية فى مرحلة عمرية تسمى مرحلة المراهقة، ويقصد بالمراهقة أنها مرحلة النمو الذى يصل فيها الطفل إلى مرحلة البلوغ، وعند استخدام مصطلح المراهقة فإن هذا المصطلح يتضمن نموًّا جسميًّا واجتماعيًّا ونفسيًّا، وتبدأ مرحلة المراهقة عند البنين فى ثلاث عشرة سنة فأكثر تقريبًا، وتبدأ عند البنات فى سن اثنتى عشرة سنة فأكثر تقريبًا، يختلف سن بداية المراهقة من مجتمع إلى مجتمع وغالبًا ما تبدأ مبكرة فى المناطق الحارة عنها فى المناطق الباردة، ومرحلة المراهقة المبكرة التى تبدأ مع بداية البلوغ وتنتهى عند سن ست عشرة أو سبع عشرة سنة، وقد تم تحديد هذا السن بطريقة قسريه تختلف من مجتمع لآخر، وهناك اتفاق على أن تنقسم فترة المراهقة إلى مرحلتين هما، المراهقة المبكرة، المراهقة المتأخرة، وتبدأ مرحلة المراهقة المبكرة مع سن البلوغ وتنتهى فى سن ١٦ أو ١٧ سنة أو عند التحاق المراهق بالصف الثانى أو الثالث الثانوى، أما مرحلة المراهقة المتأخره فتبدأ فى نهاية التعليم الثانوى وتمتد إلى مرحلة التعليم الجامعى، وفى المرحلة الأخيرة وهى التى يستعد فيهاالمراهق لدخول مرحلة الرشد فيستعد لذلك مهنيًا ويتعرف بشكل أكثر نضجًا وقد تمتد هذه المرحلة إلى ٢٠ سنة أو أكثر.

وفيمايلى عرض لخصائص طلاب المرحلة الثانوية من حيث:

النمو الجسمى

تعد «مرحلة المراهقة» طفرة فى النمو الجسمى، فهى مرحلة نمو جسمى سريع، وهذه التغيرات السريعة التى تصاحب النمو الجسمى ومنها الجنسى تجعله غير واثق فى نفسه وفى قدراته واهتماماته، وتكون لدية مشاعر قوية تعكس شعورة بعدم الاستقرار ومن أهم المشكلات المصاحبة للنمو الجنسى للمراهق هو ظهور حب الشباب والتهيجات الجلدية للمراهق والمراهقة، وكذلك المعاناه الجسيمة المصاحبة عند المراهقه مثل: الصداع، وآلام الظهر ونوبات تغير المزاج والاكتئاب.

التطبيقات التربوية لخصائص النمو الجسمى:

- الاستفادة من مادة الرياضيات والعلوم وتطبيقاتها العملية التى تعمل على تنمية جوانب النمو الجسمى بأبعادها المختلفة .

المقدمة

- ❑ الاهتمام بالأهداف المعرفية فى المواد المختلفة لتعريف الطلاب وتبصيرهم ببعض المشكلات كممارسة التدخين واختيار الاصدقاء.

النمو الحركى

ينتج عن النمو الجسمى السريع ميل الطالب إلى الكسل والخمول ويكون قليل النشاط والحركة ، والمراهقون فى بداية هذه المرحلة يكون توافقة الحركى غير دقيق وتتسم حركاته بعدم الاتزان وكثيرًا ما يصطدم بالأجسام التى تعترضه أو تسقط من بين يدية الأشياء التى يمسك بها، ومما يساعده على عدم استقراره الحركى تعرضه لنقد الكبار وتعليقاتهم وتحميله العديد من المسئوليات الاجتماعية، مما قد يسبب له الارتباك وفقدان الاتزان.

التطبيقات التر بوية لخصائص النمو الحر كي:

- ❑ تشجيع ورعاية النمو الحركى عن طريق الانشطة المختلفة .
- ❑ تضمين بعض موضوعات الرياضيات بالأنشطة الحركية بالتعاون مع معلم التربية الرياضية .

النمو العقلى

القدرات العقلية مثل القدرة اللغوية والقدرة العددية والقدرة المكانية والقدرة الميكانيكية والقدرة الموسيقية تظل فى نموها المضطرد خلال فترة المراهقة ، حيث يميل المراهق إلى القراءة والاطلاع والرحلات الخارجية وقراءة القصص والمجلات فى محاولة للبعد عن المناهج الدراسية، ويحاول المراهق التعبير عن ذاته ونقدها عن طريق مذكراته، وكتابه المذكرات الخاصة علامة من علامات النمو العقلى والنمو الاجتماعى، وقد تكون وسيلة لتفريغ الانفعالات والهروب من القلق والضيق النفسى.

التطبيقات التربوية لخصائص النمو العقلي :

- ❑ تدريب الطلاب على استخدام الاسلوب العلمى فى التفكير .
- ❑ مراعاة الفروق الفردية بين الطلاب واشراكهم فى بعض المهام والتكليفات فى ضوء قدراتهم.

القدرات والعمليات المعرفية

تختلف القدرات عن العمليات المعرفية، فالقدرة هى ما يستطيع الفرد عمله أو القيام به بينما تتعلق العملية المعرفية بما يحدث فى العقل ذاته أو بما يدور فى العقل وهو يستجيب للمتغيرات المختلفة وعليه فإنه يمكن القول بإن القدرة تشمل على العمليات المعرفية وأنواع مثيراتها والأشكال المختلفة لاستجاباتها؛ ولذلك فإن القدرة تؤكد على الناحية العقلية البحته مثل القدرات الاستقرائية، والعمليات المعرفية التى تعتمد على القدرات العقلية هى الإنتباه الذى ينمو فى شدته ومستواه وطول مدته يستطيع المراهق استيعاب مشكلات طويلة معقدة فى سهولة ويسر، والإدراك الذى يتأثر بنمو الفرد الجسمى والعقلى والانفعالى والإجتماعى، فينمو من المستوى الحسى المباشر عند الطفل إلى المستوى المعنوى المجرد عند المراهق، وتنمو عملية التذكر وتنمو معها القدرة على الحفظ والاسترجاع والتعرف، والتذكر عند المراهق يعتمد على الفهم واستنتاج العلاقات بين العناصر التى يتم تذكرها ويتأثر تذكر الفرد للموضوعات المختلفة بدرجة ميله نحوها واستمتاعه بها وبانفعالاته وخبراته المختلفة وأيضا بنمو القدرة على الانتباه.

أما عملية التفكير فإنها تتأثر عند المراهق بالبيئة المحيطة وبما تتضمنه من متغيرات تحفزه إلى الوان مختلفة من الاستدلال وحل المشكلات، تزداد قدرة المراهق على التخيل المجرد المبنى على الصورة اللفظية، كما تظهر القدرة المكانية لدى المراهق فى قدرته على فهم الأشكال الهندسية المختلفة وإدراك العلاقات المكانية فى سهولة تصور حركات الأشكال والمجسمات، أما القدرة العددية فتوضح فى القدرة على إجراء العمليات بسهولة وسرعة، وتظل القدرات مطردة فى نموها خلال فترة المراهقة وفترة الرشد، ما عدا قدرة السرعة الادراكية فإنها تضعف فى أواخر مرحلة المراهقة .

النمو الإنفعالى

ترتبط انفعالات الفرد بتغييرات عضوية داخلية يصاحبها مشاعر وجدانية وتغيرات فسيولوجية وكيميائية داخل الجسم، وتؤثر بيئة الفرد فى تلك الانفعالات، فهى بمثابة متغير لها، وللنمو أثر فى تغير وتطور الاستجابات للمثيرات، ولكن المظاهر الداخلية تكون أقرب للثبات والاستقرار منها إلى التغير، وتتسم مرحلة المراهقة أنها عنيفة فى حدة الإنفعالات، حيث نجد المراهق دائم الثورة على الأوضاع متمردًا على الكبار، كثير النقد، ويشعر المراهق بأن الأسرة والمدرسة والمجتمع لا تقدر موقفه، ولا تحس بإحساسه الجديد، لذا فهو يسعى دون قصد لآن يؤكد نفسه بثورته وتمرده وعناده.

التطبيقات التربوية لخصائص النمو الانفعالى:

- تنمية الثقة والاستقلالية لدى الطلاب من خلال مشاركة المعلم للطلاب فى عرض افكارهم ومشاركتهم لمشكلاتهم الشخصية .
- اجتناب المعلم لاساليب العقاب غير التربوية (كالعقاب البدنى٩ أو السخرية أو الاستهزاء ... الخ

النمو الإجتماعى

مع بداية مرحلة المراهقة تزداد مجالات النشاط الاجتماعى، ويتنوع الاتصال الشخصى بالمعلمين والقادة والرفاق وغيرهم، وباتساع دائرة العلاقات والتفاعل الاجتماعى يتخلص المراهق من بعض جوانب الأنانية التى تطبع سلوكه فى مرحلة الطفولة فيحاول أن يأخذ ويعطى ويتعاون مع الآخرين وأثناء تفاعل المراهق وتعامله مع الآخرين تتأكد لديه مظاهر الثقة بالنفس وتأكيد الذات، ومحاولته إشعار الآخرين بأهميته كفرد له كيان مستقل، هذا ما يؤكد ميل المراهق للعناية بمظهره وملابسه وطريقة حديثة فنجده يتحدث كثيرًا عن نفسه وعن قدراته وتفوقه وفى مجالات التحصيل أو فى مجالات الرياضة.

التطبيقات التربوية لخصائص النمو الاجتماعي:

- استثمار ميول الطالب فى تنمية شخصيته.
- تنمية التفاعل الاجتماعي بين الطلاب والمعلمين.

إدراة وتنظيم بيئة التعلم النشط

تتمثل الإدارة الجيدة للمعلم لبيئة التعلم والتى تعتمد على مشاركة الطلاب فى التخطيط والتنفيذ للعملية التعليمية عاملاً مهمًّا على توفير الجهد والاستغلال الأمثل لموقف التعليم، وعنصرًا مهمًّا فى تحقيق الأهداف التعليمية المنشودة.

المقدمة

ومع ظهور الأساليب التربوية الحديثة التى تؤكد على ضرورة أن يكون الطالب هو محور العملية التعليمية وأن يكون له دورًا إيجابيًّا فى العملية التعليمية وبالتالى من المفضل إشتراكه فى إدارة هذه العملية، ومع التأكيد على دور التعلم النشط وهو ما أدى فى جملته إلى إدارة بيئة التعلم بتلك التغيرات التربوية، ومع مراعاة خصائص طلاب المرحلة الثانوية، حيث تختلف إدارة بيئة التعلم التى يتمركز فيها التعليم حول المتعلم، أو مما يسمح له القيام ببعض الأعمال الإدارية داخل الفصل الدراسى، ويتطلب ذلك منح الطلاب بعض الحرية فى إدارة بيئة التعلم ذاتيًّا تحت توجية وإشراف المعلم، الأمر الذى يتطلب وضع مجموعة من القواعد العامة للتعامل داخل بيئة التعلم يتوفر بها الشروط التالية:

- ان تكون متوافقة مع قواعد وسياسات المدرسة وداعمه لها
- (مثل: الأهتمام بنظافة المكان – احترام المعلم – احترام الإدارة المدرسية – احترام الزملاء.....)
- ان تحدد مجموعة من الأسس التى يجب توافرها فى السلوك السوى للطلاب، وأن يدعم كل سلوك بمبررات عقلانية، بشكل يبين ضرورة هذا السلوك وفائدته لسير العمل فى الفصل بشكل إيجابى.
- إن تكون مقبولة من المعلم والطالب، وهذا يستلزم أن يتعاونا فى وضعها.

مكونات إدارة بيئة التعلم

حين تكون إدارة بيئة التعلم عملية مشتركة بين المعلم والطلاب، فإن هذا يعنى ضرورة إعادة صياغة المعلم لأدواره، حيث يقوم بتعظيم دور المتعلم، وأن يصبح المعلم عضوًا فى جماعة أو قائدًا فى فريق أكثر من كونه المصدر الوحيد للسلطة.

إن بيئة التعلم قد تكون حجرة الدراسة أو المعمل أو المكتبة أو حجرة الوسائط المتعددة أو غير ذلك، حيث يوجد الطلاب مع معلمهم يخططون وينفذون معًا عددًا من الأنشطة التربوية، ومن ثم فإن مكونات بيئة التعلم تتمثل فيما يلى:

- التخطيط الجيد لتحديد خطوات وطريقة تنفيذ العملية التعليمية
- التنظيم المادى للفصل لمجابهة إحتياجات العملية التعليمية
- تحديد اساليب أو طرق التفاعل بين المعلم والطلاب.
- تهيئة مناخ الفصل لمجابهة احتياجات الطلاب لتحقيق الأهداف المنشودة
- ضبط سلوك الطلاب.
- استغلال البيئة المحيطة أفضل استغلال لإحداث عملية التعليم / التعلم الجيد.
- الاستغلال الأمثل للوقت لتحقيق اكبر وقت ممكن للتعليم.

وتحدد هذه المكونات الجوانب التى يجب أن يركز عليها المعلم عند وضعه تصورًا لإدارة فصله بما يضمن له النجاح فى مهمته.

السمات والمهارات اللازمة لإدارة بيئة التعلم النشط

يتطلب نجاح المعلم فى قيادته التربوية لبيئة التعلم إلى توافر مجموعة من السمات والمهارات الأساسية وهى كلها لازمة لنجاح المعلم بدرجات متفاوته ومنها:

المقدمة

السمات الشخصية: وتشمل المبادآه، الثقة بالنفس، والقدرة على الإبتكار، وتحمل المسئولية، ضبط النفس، الحزم والسرعة فى اختيار البدائل

المهارات الفنية: وهى المعرفة المتخصصة فى فرع من فروع العلم والكفاءة فى استخدام هذا الفرع بما يحقق الهدف المنشود، وتكتسب هذه المهارات بالدراسة والخبرة والتدريب

مهارات اجتماعية وتعنى قدرة المعلم على التعامل مع طلابه وتنسيق جهودهم، وخلق روح العمل الجماعى بينهم، وايضا قدرته على الارتفاع والتأيثر ومواجهة المشاكل والتصدى لها بأسلوب ناجح.

تنظيم بيئة التعلم النشط

تحتاج إدارة بيئة التعلم إلى عناية فائقة من المعلم للتنظيم والتخطيط والترتيب، ويعد الفصل وترتيبه أحد العوامل الرئيسية لنجاح عمل المعلم لتحقيق أهداف التعلم النشط، ولذلك يجب على المعلم أن يراعى عدد من النقاط الهامة وهى:

المرونة: وتعد حجر الزاوية فى تنظيم الفصل؛ لأنه مهما نظم المعلم فصله فسوف يتم تعديله عند التطبيق ليناسب احتياجات الطلاب واستراتيجيات التدريس المستخدمة.

(٤) **نوع الانشطة:** يجب أن يضع المعلم فى اعتباره أن النشاط الذى سوف يقوم به الطلاب هو الذى يحدد شكل الفصل وترتيب مقاعد الطلاب وحركاتهم مثل: التعلم الفردى – التعلم التعاونى – تعلم الأقران وهكذا.

(٥) **تنظيم الاثاث والمواد والأدوات:** تنظيم الفصل للتعلم النشط يعنى تنظيم المكان حتى يمكن للطلاب العمل بمفردهم أو فى مجموعات كبيرة، و إن أمكن يستخدم أثاثًا سهل الحركة حتى يمكن إعادة ترتيبه.

(٦) **المصادر التعليمية:** يجب ان يحتوى جزء من الحجرة على المصادر التعليمية وتكون مناسبة للطلاب من حيث المستوى العمرى وتحدى قدراتهم.

(٧) **مراعاة الفروق الفردية بين الطلاب.**

إدارة وقت التعلم بفاعلية

أن التخطيط لإدارة الوقت بمثل عاملاً مهمًّا فى التعليم داخل الفصل وهنا التخطيط يمر بالخطوات التالية:

- ❑ دراسة استطلاعية للوقوف على كيفية استغلال الوقت ويدخل فيها دراسة السجلات المختلفة الخاصة بالتدريس والأنشطة.
- ❑ تحديد الأهداف المستهدفة بدقة.
- ❑ تحديد الأولويات والمهام اللازم تنفيذها.
- ❑ وضع خطة للعمل يحدد فيها الوقت اللازم لكل مهمة من المهام فى ضوء الأهداف والأولويات .
- ❑ تنفيذ هذه الخطة وفق جدول زمن محدد.
- ❑ متابعة تنفيذ الخطة وتقويم الأداء.
- ❑ تبنى اساليب وحلول لمواجهة مشكلات الوقت.

وتشير هنا إلى أن التخطيط لدرس ما لابد أن يرافقه زمن كل مرحلة من مراحل التدريس، وعلى المعلم أن ينجز خطته تبعًا للزمن المحدد، ولكى يحسن المعلم من إدارة وقته داخل الصف ينبغى عليه أن يقوم بالآتى:

- ❑ الإلتزام بوقت الحصة من حيث توقيت بدايتها وتوقيت نهايتها.
- ❑ تحليل المشكلات التى يمكن أن تواجهه أثناء الحصة وتستنفذ وقتها واسبابها وكيفية علاجها.
- ❑ التخطيط الجيد لدرسه حيث يساعده ذلك على إدارة الفصل بفاعلية واستثمار وقت الحصة.

المقدمة

بناء جدول مواصفات الاختبار التحصيلى

يهدف الاختبار التحصيلى إلى تحديد مقدار ما اكتسبه أو تعلمه المتعلم، الأمر الذى يسمح بمقارنه مستوى تحصيل الطالب بمستوى تحصيل غيره من الطلاب الذين طبق عليهم نفس الاختبار ولبناء الاختبار التحصيلى عدة خطوات:

- تحديد الأهداف (النواتج) التى يهدف المقرر إلى تحقيقها.
- تحديد محتوى الاختبار (أى الموضوعات التى يغطيها الاختبار) فى ضوء الأهداف التى يسعى الاختبار إلى تحقيقها، ومن وسائل تحقيق ذلك عمل جدول ثنائى يطلق عليه جدول المواصفات، وهو جدول ثنائى يتضمن الموضوعات التى يجب ان يغطيها الاختبار، والأهداف التعليمية للمقرر الدراسى (نواتج التعلم)، والأهمية النسبية (الوزن النسبى للموضوعات والأهداف). واستخدام جدول المواصفات يزيد من احتمالية تمثيل الاختبار للجوانب الهامة للمقرر الدراسى، ونسب تمثيلها للأهداف المنشودة، الأمر الذى يرفع من صدق هذا الاختبار، كما أن استخدام هذا الجدول يعمل كموجة للمعلم فى اختيار الأفكار التى يجب ان يتضمنها الاختبار.

خطوات إعداد جدول المواصفات

- تحديد نواتج التعلم للمقرر الدراسى والأوزان النسبية لكل منها والتى تعكس الاهتمام الذى تحظى به فى عملية التدريس، وتكتب أعلى اعمدة جدول المواصفات.
- تحديد موضوعات المقرر الدراسى، ونسبة تمثيل كل منها، ولكى يتسنى للمعلم أو معد الاختبار تحديد الأوزان النسبية أو نسبة تمثيل موضوعات المقرر الدراسى يمكنه الاستعانة بالموجهات التالية:
- الزمن المخصص لتدريس كل موضوع من موضوعات المقرر الدراسى.

وبعد تحديد الموضوعات التى يتضمنها المقرر الدراسى، والأوزان النسبية لكل منها تكتب هذه الموضوعات افقيًا على صفوف الجدول، وينشأ عن تقاطع الأعمدة التى تمثل نواتج التعلم، والصفوف التى تمثل الموضوعات عدد معين من خلايا (الخانات) التى تحدد وتعكس درجة تمثيل كل موضوع من موضوعات المحتوي التى تحدد بدورها نسبة الأسئلة أو عدد الأسئلة التى يجب أن يتضمنها الاختبار بالنسبة لكل موضوع من موضوعات المحتوى، والوزن النسبى المحدد لكل موضوع من موضوعات المحتوى، ولتحديد الأهمية النسبية لكل خلية من خلايا جدول المواصفات يتم اتباع الخطوات التالية:

- يتم تحديد وضع الخلية.
- يتم تحديد (الموضوع) الذى يتقاطع مع الخلية.
- يتم تحديد النسبة المئوية الكلية للصف.
- يتم تحديد النسبة المئوية الكلية للعمود (الهدف) الذى يتقاطع مع الخلية.
- يتم تحديد النسبة المئوية الكلية للعمود .

المحتويات

أولاً: الجـــبـر

الوحدة الأولى: التباديل والتوافيق ونظرية ذات الحدين

الوحدة الثانية: الأعداد المركبة

الوحدة الثالثة: المحددات والمصفوفات

الجبر

المحتويات

ثانياً: الهندسة الفراغية

الهندسة الفراغية

الوحدة الأولى

التباديل والتوافيق ونظرية ذات الحدين

Permutation, combination and Binomail theorem

مقدمة الوحدة

تعد موضوعات التباديل والتوافيق ونظرية ذات الحدين من الموضوعات الأساسية فى دراسة علم الجبر وارتباطها بالعلوم الأخرى كالفيزياء والكيمياء وغيرها. وسوف يتعرف الطالب المزيد عن مفاهيم التباديل والتوافيق ونظرية ذات الحدين وتطبيقاتهم العملية.

مخرجات الوحدة

وتتكون هذه الوحدة من أربعة دروس وهى:

الدرس الأول: مبدأ العد - التباديل - التوافيق.

الدرس الثانى: نظرية ذات الحدين بأسى صحيح موجب.

الدرس الثالث: ايجاد الحد المشتمل على $س^ك$ من مفكوك ذات الحدين.

الدرس الرابع: النسبة بين حدين متتاليين من مفكوك ذات الحدين.

وقبل البدء فى عرض دروس الوحدة أطلب من طلابك قراءة المقدمة الموضحة فى كتاب الطالب والتى توضح الكثير من المعلومات عن تاريخ نظرية ذات الحدين ومكتشف مثلث باسكال وهو العالم بليز باسكال واطلب الى طلابك الرجوع إلى الشبكة الدولية للمعلومات (الأنترنت) للحصول على المزيد من المعلومات عن علماء الرياضيات التى لهم اهتمامات فى مجال الجبر وخاصة نظرية ذات الحدين وتطبيقاتها حتى يمكن الاستفادة منها أثناء تنفيذ الدروس وما تتضمنه من أنشطة.

مخرجات التعلم:

فى نهاية هذه الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف مبدأ العد (قاعدة الجمع)
- يتعرف العلاقة بين التباديل والتوافيق كأساليب وطرق عد.
- يستنتج قوانين ونتائج على التباديل – التوافيق
- يستخدم التباديل والتوافيق فى حل مشكلات حياتية فى مجالات مختلفة.
- يتعرف نظرية ذات الحدين بأس صحيح موجب.
- يستنتج الحد العام فى مفكوك ذات الحدين.
- يستنتج النسبة بين كل حد والحد السابق له فى مفكومك ذات الحدين.
- يوجد مقابل أى حد فى مفكوك ذات الحدين وفقًا لرتبة هذا الحد.
- يوجد معامل أى قوة للمتغير س فى مفكوك $(س + ص)^ن$
- يوجد معامل أكبر حد فى مفكوك ذات الحدين.
- يستنتج علاقات بين التوافيق مستخدمًا مفكوك ذات الحدين.
- يستنتج العلاقة بين مثلث باسكال ومعاملات مفكوك ذات الحدين.
- يستنتج أنماط فى مثلث باسكال.
- يحل تطبيقات رياضية وحياتية متنوعه على نظرية ذات الحدين.

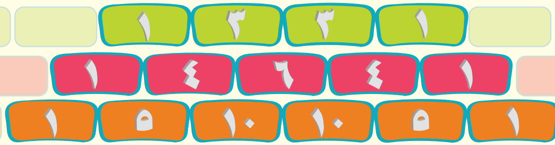
زمن تدريس الوحدة: ١٢ حصة

أولًا: الجـــبـر

الوحدة الأولى

التباديل والتوافيق ونظرية ذات الحدين

Permutation , combination and Binomial theorem



مقدمة الوحدة

وُلِد نصر الدين الطوسى (١٢٠١م – ١٢٧٤م) بجهرود، قُرب طوس الواقعة فى إيران، من أسرة علم وفلسفة، تتلمذ على يدى كمال الدين الموصلى ومعين الدين المصرى، فدرس عليهما الحكمة والفلسفة وعلم الفلك والرياضيات، له باع طويل فى حساب الإمكانات لحدوث الظواهر المختلفة، كما استخدم التباديل والتوافيق، وكان لكاردن (١٥٠١م –١٥٧٦م) اهتمامات فى حساب عدد الإمكانات بطريقة مبدأ العد الأساسى، مما أتاح له مجالاً كبيرًا فى معمارية الحاسوب (Computer Architecture) وهى عبارة عن تصميم وبنية العمليات الوظيفية للحاسوب، وتتناول هذه الوحدة مبدأ العد والعلاقة بين التباديل والتوافيق واستخداماتها فى حل بعض المشكلات الرياضية، وتعرف على نظرية ذات الحدين، وحل بعض التطبيقات الرياضية والحياتية عليها.

أهداف الوحدة

فى نهاية هذه الوحدة، وبعد تنفيذ الأنشطة فيها، يتوقع من الطالب أن:

- يتعرف مبدأ العد (قاعدة الجمع)
- يتعرف العلاقة بين التباديل والتوافيق كأساليب وطرق العد.
- يستنتج قوانين ونتائج على التباديل والتوافيق.
- يستخدم التباديل والتوافيق فى حل مشكلات رياضية حياتية فى مجالات مختلفة
- يتعرف نظرية ذات الحدين بأس صحيح موجب.
- يستنتج الحد العام فى مفكوك ذات الحدين.
- يستنتج النسبة بين كل حد والحد السابق له فى مفكوك ذات الحدين.
- يوجد معامل أى حد فى مكفوك ذات الحدين وفقًا لرتبة هذا الحد.
- يوجد معامل أى قوة للمتغير س فى مفكوك $(س+ص)^ن$
- يوجد الحد الخالى من س فى مفكوك $(س + ص)^ن$
- يوجد معامل أكبر حد فى مفكوك ذات الحدين
- يوجد الحد الأوسط فى مفكوك ذات الحدين عندما ن عدد زوجى والحدان الأوسطان عندما ن عدد فردى.
- يستنتج علاقات بين التوافيق مستخدمًا مفكوك ذات الحدين
- يستنتج العلاقة بين مثلث باسكال ومعاملات مفكوك ذات الحدين، ويستنتج بعض الأنماط فى مثلث باسكال.
- يحل تطبيقات رياضية وحياتية متنوعة على نظرية ذات الحدين.

٢ الصف الثالث الثانوى – كتاب الطالب

مصطلحات أساسية

- مبدأ العد Fundamental counting principle
- التباديل Permutations
- التوافيق Combinations
- نظرية ذات الحدين Binomial Theorem

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية Scientific calculator

دروس الوحدة

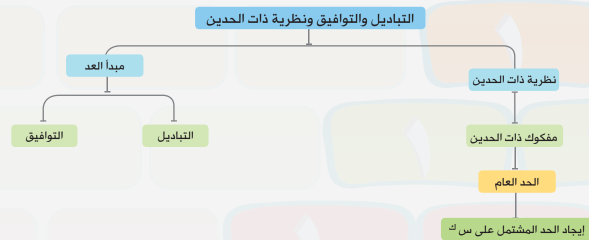
الدرس (١ – ١): مبدأ العد – التباديل – التوافيق

الدرس (١ – ٢): نظرية ذات الحدين بأس صحيح موجب

الدرس (١ – ٣): إيجاد الحد المشتمل على $س^{ك}$ من مفكوك ذات الحدين

الدرس (١ – ٤): النسبة بين حدين متتاليين من مفكوك ذات الحدين

مخطط تنظيمى للوحدة



كتاب الجبر والهندسة الفراغية – الجبر ٣

مكان التدريس

الفصل الدراسى.

مصادر التعلم

- كتاب الطالب من ص ٢ الى ص ٤١.
- الشبكة الدولية للمعلومات.

طرق التدريس المقترحة

العرض المباشر - العصف الذهنى - المناقشة والحوار - حل المشكلات.

الوسائل التعليمية المستخدمة:

السبورة التعليمية - أقلام - آلة حاسبة علمية - آلة حاسبة رسومية.

طرق التقييم المستخدمة

تتمثل فى الأسئلة الشفهية والتحريرية الفردية والجماعية قبل وبعد وأثناء الدرس، والأنشطة المقترحة، وسلم التقييم الخاص بالأنشطة الموجودة بالوحدة. والتكاليف الفردية والجماعية واختبار الوحدة والاختبار التراكمى (تقييم ذاتى).

المخطط التنظيمى للوحدة:

يتناول المخطط التنظيمى للوحدة المفهوم الأساسى لكل من مبدأ العد - التباديل - التوافيق - نظرية ذات الحدين و يوضح العلاقة بين مثلث باسكال ومعاملات مفكوك ذات الحدين، كذلك استنتاج النسبة بين كل حد والحد السابق له فى مفكوك ذات الحدين.

وأخيرًا وليس آخرًا يتناول تطبيقات رياضية وحياتية متنوعة على نظرية ذات الحدين.

١ - ١ مبدأ العد - التباديل - التوافيق

Fundamental counting principle permulations combinations

خلفية:

سبق وأن درس الطالب مبدأ العد بشكل مبسط وسوف نستكمل دراسة مبدأ العد (قاعدة الجمع) ونتطرق إلى مفهوم التباديل ومفهوم التوافيق والعلاقة بينهما ونتناول تطبيقات على أستخدام التباديل والتوافيق فى الحياة العامة.

أهداف الدرس

بعد دراسة هذا الموضوع وتنفيذ الأنشطة يتوقع من الطالب أن:

- يتعرف مبدأ العد (قاعدة الجمع).
- يستنتج مزيد من العلاقة بين التباديل والتوافيق.
- يحل مسائل متنوعة باستخدام التباديل والتوافيق.
- يوظف تطبيقات عملية باستخدام التباديل والتوافيق.

المواد التعليمية المستخدمة:

آلة حاسبة متطورة

طرق التدريس المقترحة:

العرض المباشر - الحوار والمناقشة - العصف الذهنى - حل المشكلات - الاكتشاف

مكان التدريس:

الفصل الدراسى

مصادر التعلم:

- كتاب الطالب من ص ٤ الى ص ١٣
- الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت)

التهيئة

- كلف طلابك باستخدام الشبكة العنكبوتية للمعلومات البحث عن مبدأ العد (قاعدة التجميع).
- ناقش طلابك فيما توصلوا إليه من معلومات وتوظيفها داخل الدرس.

الوحدة الأولى

١ - ١ مبدأ العد - التباديل - التوافيق

Fundamental counting principle permutations combinations

سوف تتعلم

- مبدأ العد (قاعدة الجمع)
- مزيد من العلاقات بين التباديل والتوافيق.
- تطبيقات على استخدام التباديل والتوافيق فى الحياة العامة.

مصطلحات أساسية

- التباديل *Permutations*
- التوافيق *Combinations*
- مبدأ العد *Counting principle*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة متقدمة

تمهيد

أولًا: مبدأ العد: *Multiplication rule*

سبق أن درست مبدأ العد (قاعدة الضرب) والتى تنص على:

إذا كان عدد طرق إجراء عمل ما ن طريقة، وعدد طرق إجراء عمل آخر م طريقة، فإن عدد طرق إجراء العمل الأول والعمل الثانى يساوى (م × ن) طريقة.

فكر و ناقش

كم عددًا يمكن تكوينه من ثلاثة أرقام مختلفة من عناصر المجموعة {١، ٢، ٣، ٤، ٥} حيث إن العدد مكون من ثلاثة أرقام (٣ منازل)؟

عدد طرق تكوين رقم الآحاد = ٥

عدد طرق تكوين رقم العشرات = ٤

عدد طرق تكوين رقم المئات = ٣

وبالتالى عدد طرق تكوين عدد مكون من ثلاثة أرقام مختلفة من مجموعة الأرقام المعطاة = ٥ × ٤ × ٣ = ٦٠

والآن فكر: كم عددًا مكونًا من ثلاثة أرقام (يسمح بالتكرار) من مجموعة الأرقام {١، ٢، ٣، ٤، ٥}؟

تعلم

مبدأ العد (قاعدة الجمع) *Addition rule*

إذا كان عدد طرق إجراء عمل ما ن طريقة، وعدد طرق إجراء عمل آخر م طريقة، فإن عدد طرق إجراء العمل الأول أو العمل الثانى يساوى (م + ن) طريقة.

مثال

(١) فصل مختلط الجنسين به ٩ أولاد، ٦ بنات، يُراد تكوين فريق مكون من ٤ أفراد من هذا الفصل بحيث يكون الفريق من نفس الجنس.

الحل

أ عدد طرق تكوين الفريق إذا كان أعضاؤه أولادًا فقط = $^{٩}ق_{٤}$ = ١٢٦

٤ الصف الثالث الثانوى - كتاب الطالب

إجراءات الدرس:

- اطرح مع طلابك «فكر وناقش». بحيث تعرض وتسأل عن العدد الذى يمكن تكوينه من المجموعة {١، ٢، ٣، ٤، ٥} دون تكرار ويكون أبقل من ٣٠٠.
- تابع إجابات الطلاب ودونها على السبورة..
- ناقش الاجابات ومدى صحتها.
- وضح لطلابك ما المقصود بمبدأ العد.
- طبق قاعدة الجمع) على مثال ص ٤
- وضح لطلابك أنها طريقة أسهل وسوف تيسر لنا بعض المعالجات الرياضية.

ب) عدد طرق تكوين الفريق إذا كان أعضاؤه بنات فقط = $^{٦}ق_{٤}$ = ١٥

عدد طرق تكوين الفريق إذا كان أعضاؤه من نفس الجنس = $^{٩}ق_{٤} + ^{٦}ق_{٤}$ = ١٢٦ + ١٥ = ١٤١

حاول أن تحل

(١) اختير ٣ أشخاص معًا من مجموعة مكونة من ٥ رجال، ٤ نساء أوجد: كم طريقة يمكن بها اختيار الأشخاص الثلاثة فى كل من الحالات الآتية:

أ) إذا كان الأشخاص الثلاثة من نفس الجنس؟

ب) إذا كان الأشخاص الثلاثة فيهم اثنان فقط من نفس الجنس؟

مثال

(٢) تحتوى ورقة امتحان على ٨ أسئلة، وعلى الطالب أن يجيب عن ٦ منها، بشرط أن تتضمن سؤالين على الأقل من الأربعة الأولى، فكم طريقة يمكن بها للطالب اختيار الأسئلة التى يجيب عنها؟

الحل

أ) يمكن للطالب أن يختار سؤالين من الأربعة الأولى وأربعة أسئلة من باقى الورقة بطرق عددها $^{٤}ق_{٢} \times {}^{٤}ق_{٤}$ = ٦

ب) يمكن للطالب أن يختار ٣ أسئلة من الأربعة الأولى وثلاثة من باقى الورقة بطرق عددها $^{٤}ق_{٣} \times {}^{٤}ق_{٣}$ = ١٦

جـ) يمكن للطالب أن يختار ٤ أسئلة من الأربعة الأولى وسؤالين من باقى الورقة بطرق عددها $^{٤}ق_{٤} \times {}^{٤}ق_{٢}$ = ٦

عدد طرق اختيار الأسئلة = $^{٤}ق_{٢} \times {}^{٤}ق_{٤} + {}^{٤}ق_{٣} \times {}^{٤}ق_{٣} + {}^{٤}ق_{٤} \times {}^{٤}ق_{٢}$ = ٦ + ١٦ + ٦ = ٢٨

حاول أن تحل

(٢) يدرس الطالب فى السنة الأولى بإحدى الكليات الجامعية ٨ مواد دراسية، ولا يحق له الانتقال إلى السنة الثانية إلا إذا نجح فى ٦ منها على الأقل، فكم طريقة يمكن بها للطالب أن ينتقل للسنة الثانية؟

عدد طرق اختيار عينة مع الإحلال أو بدون إحلال

عند اختيار ر من الأشياء من بين ن من الأشياء فإننا نراعى الحالات الآتية:

١ - إذا كان الاختيار مع الإحلال والترتيب فإن عدد طرق الاختيار = $ن^{ر}$

- عدد طرق تكوين عدد مكون من رقمين من مجموعة الأرقام {١، ٢، ٣، ٤، ٥} يساوى $٥^{٢}$ = ٢٥

٢ - إذا كان الاختيار مع الإحلال وبدون ترتيب فإن عدد طرق الاختيار = $^{ن+ر-١}ق_{ر}$

- عدد طرق توزيع ٣ كرات متماثلة على ٤ صناديق يساوى = $^{٤+٣-١}ق_{٣} = {}^{٦}ق_{٣}$ = ٢٠

٣ - إذا كان الاختيار بدون إحلال مع مراعاة الترتيب فإن عدد طرق الاختيار = $^{ن}ل_{ر}$

- عدد طرق وقوف ٤ سيارات فى ساحة انتظار به ١٠ أماكن يساوى $^{١٠}ل_{٤}$ = ١٠ × ٩ × ٨ × ٧ = ٥٠٤٠

٤ - إذا كان الاختيار بدون إحلال دون مراعاة الترتيب فإن عدد طرق الاختيار = $^{ن}ق_{ر}$

- عدد طرق اختيار فريق من ٥ أشخاص من بين ١٢ شخصًا يساوى $^{١٢}ق_{٥}$ = ٧٩٢

مثال (١) ص ٤، ٥

- كلف طلابك بحل مثال ١ فهو تطبيق مباشرة القانون والتوافيق ومبدأ العد (قاعدة الجمع)
- ناقش إجابات طلابك وقدم التغذية الراجعة المناسبة.

ثانيًا: التباديل:

- استرجع مع طلابك المفاهيم الأساسية للتباديل والعلاقات الأساسية لها:
- وضح لطلابك تعريف التباديل كالتالى:

اذا كان ن ، ر عددين صحيحين موجبين بحيث ن ≥ ر ، فإن عدد التباديل المكون كل منها من أشياء عددها ر ، والمأخوذة من بين ن من الأشياء هو.

$$^{ن}ل_{ر} = \frac{\lfloor ن}{\lfloor ن - ر} \quad \text{وتنطق} \quad \frac{\text{مضروب ن}}{\text{مضروب ن - ر}}$$

ونستطيع أن نرى لماذا يمكن تطبيق هذا القانون لأن:

$$^{ن}ل_{ر} = ن (ن - ١) \times ...... (ن - ر + ١)$$

ويرمز للمضروب ن $\lfloor ن$

التوافيق:

- استرجع مع طلابك المفهوم الأساسى للتوافيق واستعرض النشاط التالى:

إذا أراد فريق الرياضة فى المدرسة اختيار ثلاث أعلام من الأعلام الموجودة بالمدرسة، وذلك لاستخدامها فى حفلة المدرسة النهائية. فهل هناك ضرورة لترتيب الأعلام؟
وماذا يسمى هذا النوع من الاختيار (تباديل أم توافيق)؟

إجابة حاول أن تحل (١) ص ٥:

أ) عدد وطرق اختيار الأشخاص الثلاثة من نفس الجنس = $^{٥}ق_{٣} + {}^{٤}ق_{٣}$ = ١٤ طريقة

ب) عدد وطرق اختيار الأشخاص الثلاثة منهم اثنان فقط من نفس الجنس = $^{٥}ق_{٢} \times {}^{٤}ق_{١} + {}^{٤}ق_{٢} \times {}^{٥}ق_{١}$ = ٧ طريقة

اجابة حاول أن تحل (٢) ص٥

عدد الطرق التى يمكن للطالب أن ينتقل للسنة التالية
= $^{٨}ق_{٦} \times {}^{٨}ق_{٧} + {}^{٨}ق_{٨}$ = ٣٧ طريقة

- ناقش مع طلابك واسترجع معهم عدد طرق اختيار عينة مع الأحلال أو بدون أحلال.
- عدد طرق وقوف ن سيارة فى مساحة انتظار سيارة فى صف واحد أو على شكل دائرة.

معلومات اضافية:

- أكد على طلابك هل الترتيب يعد عاملًا هامًا فى التوافيق؟ **لا**
- هل يكن أن يكون عدد التباديل أقل من عدد التوافيق؟ **لا**
- لماذا؟ **تفكير ناقد:**

لأن البسط فى التباديل يقسم على العدد نفسه فى حالة التوافيق أو على عدد أصغر منه وحيث ان كل ترتيب يحسب على حدة فى التباديل و إن التوفيقه الواحدة تقابل تبديله واحدة أو أكثر، وعليه فإن ذلك يجعل من الطبيعى أو المنطقى أنه لا يمكن أن يكون عدد التباديل أقل من عدد التوافيق.

ملاحظات على الأمثلة:

- ناقش مع طلابك الأمثلة الواردة فى ص ٦ لأن كل مثال يعبر عن فكرة فى استخدام تطبيق لقانون التباديل والتوافيق.
- اترك للطلاب فترة للتفكير فى حل المسائل .
- ناقش طلابك فى الإجابات المختلفة وكيفية تصحيح الخطأ.
- تأكد من فهم طلابك للخطوات التى تتبع تنفيذ واستخدام القانون لأنها تعتمد على مهارات قبليه يجب على الطالب اتقانها.
- درب طلابك على استخدام الآلة الحاسبة بعد التأكد من اتقانهم لمهارة اجراء الخطوات بالورقة والقلم وذلك للتأكد من الحل.

التقييم «الحواروالمناقشة»

حاول أن تحل:

- ناقش مع طلابك تفكير ناقد

اجابة حاول أن تحل ③

أ $^{٨}ل_{٣ر-١} = ٦٧٢٠ = {}^{٨}ل_{٥}$

$\therefore$ ٣ر - ١ = ٥ $\quad\therefore$ ٣ر = ٦ $\quad$ ر = ٢

ب $^{٩}ل_{ر-٤} = \underline{|٩} = {}^{٩}ل_{٩}$

$\therefore$ ر - ٤ = ٩ $\quad$ ر = ١٣

- أعط طلابك مثال ص ٣ (أ، جـ) وذلك يعتبر تدريب مباشر على استخدام التوافيق.

معلومات اضافية للمعلم:

- لحساب التوافيق بالآلة الحاسبة نستخدم المفتاح $_{n}C_{r}$
- وهناك رموز أخرى لحساب عدد التوافيق مثل $\binom{n}{r}$

نشاط اثرائى:

أ تحتوى قائمة الكتب التى يمكن قراءتها فى مكتبة عامة (ما) ٢٠ كتابًا.
كم عدد طرق اختيار (٤) كتب لقراءتها؟

ب وبفرض أن ترتيب قراءتك للكتب الأربعة له أهمية. أوجد عدد الطرق الممكنة لاختيار الكتب الأربعة من بين ٢٠ كتابًا

الوحدة الأولى: التباديل والتوافيق ونظرية ذات الحدين

مثال

③ حقيبة بها ١٢ كرة حمراء ، ٨ كرات بيضاء ، أوجد عدد طرق سحب ٣ كرات حمراء و ٢ كرة بيضاء فى كل من الحالات الآتية:

أ إذا كان السحب مع الاحلال والترتيب. ب إذا كان السحب بدون إحلال مع الترتيب.

جـ إذا كان السحب بدون إحلال ودون ترتيب.

الحل

أ عدد طرق السحب = $١٢^{٣} \times ٨^{٢}$ = ١١٠٥٩٢ ب عدد طرق السحب = $^{١٢}ل_{٣} \times {}^{٨}ل_{٢}$ = ٧٣٩٢٠

جـ عدد طرق السحب = $^{١٢}ق_{٣} \times {}^{٨}ق_{٢}$ = ٦١٦٠

تفكير ناقد: أوجد عدد طرق وقوف ٤ سيارات متجاورة فى ساحة انتظار بها ١٠ أماكن وقوف.

أ إذا كان الموقف على شكل دائرة . ب إذا كان الموقف على شكل صف.

ثانيًا: التباديل:

سبق أن درست مفهوم التباديل والعلاقات الأساسية لها

وعلمت أن: لكل ن، ر ∈ ط ، ن ⩾ ر يكون :

١) $^{ن}ل_{ر}$ = ن(ن -١) (ن-٢) ... (ن - ر +١)

٢) $^{ن}ل_{ن}$ = $\underline{|ن}$ = ن(ن -١) (ن - ٢) ... × ٣ × ٢ × ١

٣) $\underline{|ن}$ = ن $\underline{|ن-١}$ = ن (ن -١) $\underline{|ن-٢}$ = ...

٤) $^{ن}ل_{ر} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-ر}}$

هل تعلم؟

$^{ن}ل_{ر}$ ∈ ص$^{+}$

$\underline{|ن}$ ∈ ص$^{+}$

$\underline{|٠}$ = $\underline{|١}$ = ١

مثال

④ أوجد قيمة ن فى كل مما يأتى:

أ $^{٣ن-٥}ل_{٥}$ = ٢٥٢٠ ب $\underline{|ن+٢}$ = ٩٠ $\underline{|ن}$

الحل

أ $\because$ $^{٣ن-٥}ل_{٥}$ = ٢٥٢٠ $\because$ $^{٧}ل_{٥}$ = ٢٥٢٠

$\therefore$ $^{٣ن-٥}ل_{٥} = {}^{٧}ل_{٥}$ $\therefore$ ٣ ن - ٥ = ٧

$\therefore$ ن = ٤

ب $\because$ $\underline{|ن+٢}$ = ٩٠ $\underline{|ن}$ $\therefore$ $\frac{\underline{|ن+٢}}{\underline{|ن}}$ = ٩٠

$\therefore$ $^{ن+٢}ل_{٢} = {}^{١٠}ل_{٢}$ $\therefore$ ن + ٢ = ١٠

$\therefore$ ن = ٨

حاول أن تحل

③ أوجد قيمة ر فى كل مما يأتى:

أ $^{٨}ل_{٣ر-١}$ = ٦٧٢٠ ب $^{٩}ل_{ر-٤}$ = $\underline{|٩}$

مثال

⑤ إذا كان $^{٨}ل_{ن-٣} = {}^{٨}ل_{ن-٣}$ فأوجد قيمة ن

٦ الصف الثالث الثانوى - كتاب الطالب

التقييم: الحوار والمناقشة.

تفكير ناقد:

أيهما أكبر عددًا: طرق اختيار ثلاثة عناصر من بين خمسة عناصر أم طرق اختيار مع الترتيب المتسلسل لثلاثة عناصر من بين خمسة عناصر؟

أخطاء شائعة:

قد يخطئ الطلاب فى الخلط باستخدام قانون التباديل أو قانون التوافيق وبالتالى يجب أن تذكر طلابك بأن الترتيب فى التوافيق غير مهم، أما بالنسبة للتباديل فهو هام،
فمثلاً: عندما يذكر فى المسألة سحبت بطريقة عشوائية (مختارة) فتوضح هنا أن الترتيب غير مهم.

حاول أن تحل ④

$\because$ $^{ن-٤}ل_{٩} = {}^{ن-٤}ل_{٩}$

$\therefore$ صفر < ٩ ⩽ ن - ٤

ن ⩾ ١٣ $\quad\therefore$ ن ∈ {١٣، ١٤، ١٥، .....}

حاول أن تحل ٥

أذا كان ${}^{٢ن+١}ل_{ن-١} : {}^{٢ن-١}ل_{ن} = ٣ : ٥$

$$\therefore \frac{|٢ن+١}{|ن+٢} \times \frac{|ن-١}{|٢ن-١} = \frac{٣}{٥}$$

$$\frac{(٢ن+١)(٢ن)|٢ن-١}{(ن+٢)(ن+١)(ن)|ن-١} \times \frac{|ن-١}{|٢ن-١} = \frac{٣}{٥}$$

$$٢٠ن + ١٠ = ٣ن^٢ + ٩ن + ٦$$

$$٣ن^٢ - ١١ن - ٤ = صفر$$

$(٣ن + ١ \times ن - ٤) = ٠$ ن $= \frac{-١}{٣}$ موفوض، ن = ٤

حاول أن تحل ⑥

أ ${}^{ن-ر}ل_٢ = ٩٠$ $\therefore$ ن - ر = ١٠ (١)

${}^{ن+ر}ل_٢ = ٣٨٠$ $\therefore$ ن + ر = ٢٠ (٢)

$\therefore$ ن = ١٥   ر = ٥

ب ${}^{ن}ل_{ر} = ٦٠٤٨٠$، $|ر = ٧٢٠$

$\therefore$ ر = ٦ $\therefore {}^{ن}ل_٦ = ٦٠٤٨٠ = {}^{٩}ل_٦$ ن = ٩

التقييم الحوار والمناقشة:

¤ ناقش مع طلابك بند حاول أن تحل (٧) وتوصل معهم إلى الاجابات الصحيحة.

حاول أن تحل ⑧

$$٢\,|٢ن-٤ = |ن-٤\;|ن-٢$$

$$\therefore \frac{|٢ن-٤}{|ن-٤} \times \frac{|ن-٢}{|٢}$$

${}^{ن}ل_{٢ن-٤} = {}^{ن}ل_{ن+٢}$ $\therefore$ ن = ٦

حاول أن تحل ⑨

أ ${}^{ن+١}ق_{ن-١} = ٦٦$ $\therefore \frac{|ن+١}{|٢\;|ن-١} = ٦٦$

$ن^٢ + ن - ١٣٢ = ٠$ ن = ١١

ب ${}^{٢٥}ق_{٢ن-١٤} = {}^{٢٥}ق_{ن-١}$ $\therefore$ ٢ن - ٤ = ن - ١

$\therefore$ ن = ٣ ، ٢ن - ٤ + ن - ١ = ٢٥ $\therefore$ ن = ١٠

ن $\in$ {٣، ١٠}

فكر وناقش

¤ ساعد طلابك فى محاولة اثبات $\frac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن}ق_{ر-١}} = \frac{ن-ر+١}{ر}$

مبدأ العد – التباديل – التوافيق ١ - ١

الحل

$\because {}^{٨}ل_{ن-٣} = {}^{٨}ل_{ن-٣}$ $\therefore ٨ \geq ن-٣ \geq ٠$ $\therefore ١١ \geq ن \geq ٣$ $\therefore$ ن $\in$ {٣، ٤، ٥، ٦، ...، ١٠، ١١}

حاول أن تحل

④ إذا كان ${}^{ن-٤}ل_٩ = {}^{ن-٤}ل_٩$ فأوجد قيمة ن

مثال

⑥ أوجد قيمة ن إذا كان ${}^{٥٦}ل_{ر+٦} : {}^{٥٤}ل_{ر+٣} = ٣٠٨٠٠ : ١$

الحل

$\because {}^{٥٦}ل_{ر+٦} : {}^{٥٤}ل_{ر+٣} = ٣٠٨٠٠ : ١$ $\therefore \frac{|٥٦}{|٥٠-ر} \times \frac{|٥١-ر}{|٥٤} = ٣٠٨٠٠$

$\therefore ٥٦ \times ٥٥ (٥١ - ر) = ٣٠٨٠٠$ $\therefore$ ٥١ - ر = ١٠ $\therefore$ ر = ٤١

حاول أن تحل

⑤ إذا كان ${}^{٢ن+١}ل_{ن-١} : {}^{٢ن-١}ل_{ن} = ٣ : ٥$ فأوجد قيمة ن.

مثال

⑦ إذا كان ${}^{ن-٢}ل_{ر-٢} : {}^{ن-٢}ل_{ر} = ١ : ٤٢$ ، ${}^{٧}ل_{ر-٣} = ٨٤٠$ فما قيمة كل من ن، ر؟

الحل

$\because {}^{٧}ل_{ر-٣} = ٨٤٠$ ، $\because {}^{٧}ل_٤ = ٨٤٠$

$\therefore {}^{٧}ل_{ر-٣} = {}^{٧}ل_٤$ $\therefore$ ر - ٣ = ٤ $\therefore$ ر = ٧

${}^{ن-٢}ل_٥ : {}^{ن-٢}ل_٧ = ١ : ٤٢$ $\therefore \frac{|ن-٢}{|ن-٧} \times \frac{|ن-٩}{|ن-٢} = \frac{١}{٤٢}$

(ن - ٧) (ن - ٨) = ٤٢ ${}^{ن-٧}ل_٢ = {}^{٧}ل_٢$ $\therefore$ ن - ٧ = ٧   ن = ١٤

حاول أن تحل

⑥ أوجد قيمة كل من ن، ر فى كل مما يأتى:

أ ${}^{ن-ر}ل_٢ = ٩٠$ ، ${}^{ن+ر}ل_٢ = ٣٨٠$ ب ${}^{ن}ل_{ر} = ٦٠٤٨٠$، $|ر = ٧٢٠$

مثال

⑧ إذا كان ${}^{ن}ل_{ر} = ١٢٠$ فأوجد قيم ن، ر الممكنة

الحل

أولاً: ${}^{ن}ل_{ر} = ٦ \times ٥ \times ٤ = {}^{٦}ل_٣$ $\therefore$ ن = ٦ عندما ر = ٣

ثانيًا: ${}^{ن}ل_{ر} = ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ = {}^{٥}ل_٤$ $\therefore$ ن = ٥ عندما ر = ٤

ثالثًا: ${}^{ن}ل_{ر} = ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = {}^{٥}ل_٥$ $\therefore$ ن = ٥ عندما ر = ٥

رابعًا: ${}^{ن}ل_{ر} = {}^{١٢٠}ل_١$ $\therefore$ ن = ١٢٠ عندما ر = ١

كتاب الجبر والهندسة الفراغية - الجبر ٧

الوحدة الأولى: التباديل والتوافيق ونظرية ذات الحدين

حاول أن تحل

⑦ إذا كان ${}^{ن}ل_{ر} = ٢١٠$ فأوجد قيم كل من ن، ر الممكنة

ثالثًا: التوافيق :

سبق أن علمت أن لكل ن ، ر $\in$ ص$_+$ ، ن $\geq$ ر يكون

(١) ${}^{ن}ق_{ر} = \frac{{}^{ن}ل_{ر}}{|ر}$ (٢) ${}^{ن}ق_{ر} = \frac{|ن}{|ر\;|ن-ر}$

(٣) ${}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن-ر}$ إذا كان ${}^{ن}ق_{س} = {}^{ن}ق_{ص}$ فإن س = ص أو س + ص = ن

لاحظ أن

${}^{ن}ق_{ن} = {}^{ن}ق_{.} = ١$

${}^{ن}ق_{ر} \leq {}^{ن}ل_{ر}$

${}^{ن}ق_{ر} \in$ ص$^+$

مثال

⑨ أوجد قيمة ن فى كل مما يأتى:

أ ${}^{ن}ق_{ن-٣} = ١٢٠$ ب ${}^{٢٥}ق_{٣ن-٥} = {}^{٢٥}ق_{٢ن}$

الحل

أ $\because {}^{ن}ق_{ن-٣} = ١٢٠$ $\therefore {}^{ن}ق_٣ = ١٢٠$ $\because ١٢٠ = {}^{١٠}ق_٣$

$\therefore {}^{ن}ق_٣ = {}^{١٠}ق_٣$ $\therefore$ ن = ١٠

ب $\because {}^{٢٥}ق_{٣ن-٥} = {}^{٢٥}ق_{٢ن}$

أولاً: ٣ ن - ٥ = ٢ ن $\therefore$ ن = ٥ (تحقق)

ثانيًا: ٣ ن - ٥ + ٢ ن = ٢٥   ٥ ن = ٣٠ $\therefore$ ن = ٦ تحقق

حاول أن تحل

⑧ أوجد قيمة ن فى كل مما يأتى: أ ${}^{ن+١}ق_{ن-١} = ٦٦$ ب ${}^{٢٥}ق_{٢ن-١٤} = {}^{٢٥}ق_{ن-١}$

قانون النسبة *Ratio rule*

$$\frac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن}ق_{ر-١}} = \frac{ن-ر+١}{ر}$$

لاحظ أن

(١) $\frac{{}^{٢٧}ق_{١٤}}{{}^{٢٧}ق_{١٣}} = \frac{٢٧-١٣}{١٤} = ١$

(٢) $\frac{{}^{٣٦}ق_{٢٥}}{{}^{٣٦}ق_{٢٣}} = \frac{{}^{٣٦}ق_{٢٥}}{{}^{٣٦}ق_{٢٤}} \times \frac{{}^{٣٦}ق_{٢٤}}{{}^{٣٦}ق_{٢٣}}$

ويمكن إثبات العلاقة السابقة كالآتى:

الطرف الأيمن : $\frac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن}ق_{ر-١}} = \frac{|ن}{|ر\;|ن-ر} \div \frac{|ن}{|ر-١\;|ن-ر+١}$

$$= \frac{|ن}{|ر\;|ن-ر} \times \frac{|ر-١\;|ن-ر+١}{|ن}$$

$$= \frac{١}{ر\,|ر-١\;|ن-ر} \times \frac{|ر-١\,(ن-ر+١)\,|ن-ر}{١} = \frac{ن-ر+١}{ر}$$

مثال

⑩ إذا كان ${}^{ن}ق_٦ : {}^{ن}ق_٥ = \frac{١}{٣}$ أوجد قيمة $|ن-٢$

٨ الصف الثالث الثانوى - كتاب الطالب

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

⌑ ناقش مع طلابك بند حاول أن تحل وتوصل معهم إلى الاجابات الصحيحة:

إجابة حاول أن تحل:

(١٠) ∵ $^{٧}ق_{ر} : {}^{٧}ق_{ر-١} = \frac{١}{٣}$ ∴ $\frac{٧-ر+١}{ر} = \frac{١}{٣}$ ∴ $ر = ٦$

(١١) ∵ $^{ن}ل_{ر} = {}^{ن}ق_{ر} \cdot \underline{|ر}$ ∴ $\frac{^{ن}ق_{ر}\ \underline{|ر}}{^{ن}ق_{ر-١}\ \underline{|ر-١}} = \frac{٥}{١}$

∴ $\frac{٥ × ر\ \underline{|ر-١}}{٧\ \underline{|ر-١}} = \frac{٥}{١}$ $ر = ٧$

∴ $^{ن}ق_{٧} : {}^{ن}ق_{٦} = \frac{٥}{٧}$ $\frac{ن-٧+١}{٦} = \frac{٥}{٦}$

∴ $ن = ١١$

(١٢) ∵ $^{١٣}ق_{ر} : {}^{١٣}ق_{ر+١} = ٩ : ٥$

∴ $\frac{ر}{١٣-ر+١} = \frac{٩}{٥}$

$١١٧ - ٩ر = ٥ر$ $ر = ٩$

$^{ن}ق_{١١} : {}^{ن}ق_{١٢} = ١ : ٢$ ∴ $ن = ٣٥$

⌑ اعط لطلابك مثال ص ٧ وذلك لبيان العلاقات المختلفة لقانون التوافيق

⌑ وضح لطلابك الاثبات لقانون $^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر-١} = {}^{ن+١}ق_{ر}$

نشاط (١)

⌑ اطلب من طلابك (٥ طلاب) الوقوف فى مقدمة الفصل، واختر ثلاثة منهم، واطلب منهم الوقوف بتوافيق متعددة، ووضح لهم أن الترتيب ليس له أهمية.

حاول أن تحل (١٤)

∵ $^{ن}ق_{٨} × {}^{ن}ق_{٦} \geqslant {}^{ن}ق_{٧} × {}^{ن}ق_{٥}$ $\frac{^{ن}ق_{٨}}{^{ن}ق_{٧}} × \frac{^{ن}ق_{٦}}{^{ن}ق_{٥}} \geqslant ١$

$\frac{ن-٨+١}{٨} × \frac{ن-٦+١}{٦} \geqslant ١$

$\frac{(ن-٧)(ن-٥)}{٤٨} \geqslant ١$ ∴ $ن^{٢} - ١٢ن + ٣٥ \geqslant ٤٨$

$ن^{٢} - ١٢ن - ١٣ \geqslant ٠$ ∴ $ن \geqslant ١٣$

حاول أن تحل (١٥)

$^{أ+ب}ق_{ب} = \frac{\underline{|أ+ب}}{\underline{|أ} × \underline{|ب}}$ $= \frac{\underline{|١٥}}{\underline{|٨} × \underline{|٧}} = {}^{١٥}ق_{٨} \in ص_{+}$

∴ $\underline{|١٥}$ يقبل القسمة على $\underline{|٨}\ \underline{|٧}$

الحل

∵ $\frac{^{ن}ق_{٦}}{^{ن}ق_{٥}} = \frac{١}{٣}$ ∴ $\frac{ن-٦+١}{٦} = \frac{١}{٣}$ ∴ $\frac{ن-٥}{٦} = \frac{١}{٣}$ ∴ $ن = ٧$

∴ $\underline{|ن-٢} = \underline{|٦-٢} = \underline{|٤} = ٢٤$

حاول أن تحل

(٩) احسب قيمة ر إذا كان: $^{٧}ق_{ر} : {}^{٧}ق_{ر-١} = \frac{١}{٣}$

(٢) $^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر-١} = {}^{ن+١}ق_{ر}$

ويمكن إثبات ذلك على النحو الآتى:

الطرف الأيمن = $\frac{\underline{|ن}}{\underline{|ر}\ \underline{|ن-ر}} + \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ر-١}\ \underline{|ن-ر+١}} = \frac{(ن-ر+١)\underline{|ن} + ر\ \underline{|ن}}{\underline{|ر}\ \underline{|ن-ر+١}} = \frac{(ن-ر+١+ر)\underline{|ن}}{\underline{|ر}\ \underline{|ن-ر+١}}$

$= \frac{(ن+١)\underline{|ن}}{\underline{|ر}\ \underline{|ن+١-ر}} = \frac{\underline{|ن+١}}{\underline{|ر}\ \underline{|(ن+١)-ر}} = {}^{ن+١}ق_{ر}$ = الطرف الأيسر

مثال

(١١) إذا كان $^{ن+١}ل_{ر+١} : {}^{ن+١}ق_{ر+١} = ٧٢٠ : ١$ ، $^{ن}ق_{ر-٢} + {}^{ن}ق_{ر-٣} = ٥٦$ أوجد القيمة العددية لكل من ن، ر.

الحل

$^{ن+١}ل_{ر+١} : {}^{ن+١}ق_{ر+١} = ٧٢٠ : ١$

$\underline{|ر+١} = ٧٢٠$ $\underline{|ر+١} = \underline{|٦}$ ∴ $ر = ٥$

∵ $^{ن}ق_{ر-٢} + {}^{ن}ق_{ر-٣} = ٥٦$ ∴ $^{ن}ق_{٣} + {}^{ن}ق_{٢} = ٥٦$ ∴ $^{ن+١}ق_{٣} = ٥٦$

∴ $^{ن+١}ق_{٣} = {}^{٨}ق_{٣}$ ∴ $ن + ١ = ٨$ ∴ $ن = ٧$

حاول أن تحل

(١٠) إذا كان $^{١٣}ق_{ر} : {}^{١٣}ق_{ر+١} = ٩ : ٥$ ، $^{ن}ق_{ر-٢} + {}^{ن}ق_{ر-١} = ٣٤٣٢$ أوجد كلًّا من ن ، ر

مثال

(١٢) أثبت أن $^{ن}ق_{ر} + ٢\ {}^{ن}ق_{ر+١} + {}^{ن}ق_{ر+٢} = {}^{ن+٢}ق_{ر+٢}$ ومن ذلك أوجد قيمة: $^{١٠}ق_{٥} + ٢\ {}^{١٠}ق_{٦} + {}^{١٠}ق_{٧}$

الحل

الطرف الأيمن = $^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر+١} + {}^{ن}ق_{ر+١} + {}^{ن}ق_{ر+٢}$

$= {}^{ن+١}ق_{ر+١} + {}^{ن+١}ق_{ر+٢} = {}^{ن+٢}ق_{ر+٢}$ = الطرف الأيسر

المقدار = $^{١٠}ق_{٥} + ٢\ {}^{١٠}ق_{٦} + {}^{١٠}ق_{٧}$ بوضع ن = ١٠ ، ر = ٥

ومن العلاقة السابقة فإن: $^{١٠}ق_{٥} + ٢\ {}^{١٠}ق_{٥+١} + {}^{١٠}ق_{٥+٢} = {}^{١٠+٢}ق_{٥+٢} = {}^{١٢}ق_{٧} = ٧٩٢$

حاول أن تحل

(١١) أ) أوجد قيمة: ن التى تحقق $^{ن}ق_{٣} + ٢\ {}^{ن}ق_{٢} + {}^{ن}ق_{١} = ١٢٠$

ب) أوجد قيمة: $\frac{^{١٧}ق_{٦} + {}^{١٧}ق_{٥}}{^{١٨}ق_{٥}}$

تفكير ناقد: أثبت أن $^{ن}ق_{ر} : {}^{ن-١}ق_{ر-١} = \frac{ن}{ر}$ ومن ذلك أثبت أن $\frac{^{٢٥}ق_{٤} + {}^{٢٤}ق_{٣}}{^{٢٤}ق_{٣} + {}^{٢٣}ق_{٢}} = \frac{٥٨}{٩}$

مثال

(١٣) إذا كان $^{ن}ق_{ر+٢} \cdot {}^{ن}ق_{ر} \geqslant {}^{ن}ق_{ر+١} × {}^{ن}ق_{ر-١}$ فاثبت أن: $ن \geqslant ٢ر + ١$

الحل

∵ $^{ن}ق_{ر+٢} × {}^{ن}ق_{ر} \geqslant {}^{ن}ق_{ر+١} × {}^{ن}ق_{ر-١}$

∴ $\frac{^{ن}ق_{ر+٢}}{^{ن}ق_{ر+١}} × \frac{^{ن}ق_{ر}}{^{ن}ق_{ر-١}} \geqslant ١$ $\frac{ن-(ر+١)}{ر+٢} × \frac{ن-(ر+١)}{ر} \geqslant ١$

$(ن-ر-١)(ن-ر+١) \geqslant ر(ر+٢)$ $(ن-ر)^{٢} \geqslant ر^{٢} + ٢ر + ١$

$(ن-ر)^{٢} \geqslant (ر+١)^{٢}$ ∴ $ن - ر \geqslant ر + ١$ $ن \geqslant ٢ر + ١$

حاول أن تحل

(١٢) أوجد قيم ن المكنة إذا كان: $^{ن}ق_{٨} × {}^{ن}ق_{٦} \geqslant {}^{ن}ق_{٧} × {}^{ن}ق_{٥}$



أولًا: اختر الإجابة الصحيحة من بين الاختيارات المعطاة:

(١) عدد طرق اختيار حرفين أو ثلاثة أحرف مختلفة معًا من عناصر المجموعة {أ ، ب، جـ ، ى ، هـ ، و} مع عدم التكرار هى:

أ) $^{٦}ق_{٢} × {}^{٦}ق_{٣}$ ب) $^{٦}ل_{٢} × {}^{٦}ل_{٣}$ جـ) $^{٦}ق_{٢} + {}^{٦}ق_{٣}$ د) $^{٦}ل_{٢} + {}^{٦}ل_{٣}$

(٢) إذا كان $^{ن}ق_{٥} : {}^{ن}ق_{٤} = ٣ : ١$ فإن ن تساوى:

أ) ٧ ب) ٩ جـ) ١٧ د) ١٩

(٣) اشترك ١٢ لاعبًا فى مسابقة للسباحة، كم طريقة يمكن بها ترتيب المركز الأول والثانى والثالث؟

أ) ١٢٣٠ ب) ١٣٢٠ جـ) ٢٣١٠ د) ٣٢١٠

(٤) أى القيم الآتية يمكن أن تساويها $^{ن}ل_{٢}$؟

أ) ٢٤ ب) ٢٥ جـ) ٢٧ د) ٣٠

(٥) إذا كان $^{١٧}ل_{م+٥} = {}^{٢٩}ل_{م+٥}$ فإن م تساوى:

أ) -٥ ب) ٠ جـ) ٥ د) ١٢

(٦) إذا كان $^{ن-٣}ل_{٧} = \underline{|٨}$ فإنها تساوى:

أ) ٨ ب) ١٠ جـ) ١١ د) ١٥

(٧) قيمة $^{٥٠}ق_{٤} + \sum_{ر=١}^{٦} {}^{٥٦-ر}ق_{٣}$ تساوى:

أ) $^{٥٦}ق_{٤}$ ب) $^{٥٦}ق_{٣}$ جـ) $^{٥٥}ق_{٤}$ د) $^{٥٥}ق_{٣}$

تمارين (١-١)

اسئلة الاختبار

① ج ② د ③ ب ④ د ⑤ أ

⑥ ج ⑦ أ ⑧ أ ⑨ أ

⑰ الإثبات $\frac{^{ن}ق_{ر}}{^{ن}ق_{ر} + ^{ن}ق_{ر+١}}$ بالقسمة على $^{ن}ق_{ر}$

$$\frac{^{ن}ق_{ر}}{^{ن}ق_{ر} + ^{ن}ق_{ر+١}} = \frac{١}{١ + \frac{ن - ر}{ر+١}} = \frac{ر+١}{ن+١}$$

قيمة المقدار $\frac{^{١٥}ق_{٦} + ^{١٥}ق_{ر}}{^{١٥}ق_{٦}} = \frac{١٦}{٧}$

⑳ $^{ن}ل_{ر} = ١٢٠ \, ^{ن}ق_{ن-ر}$ ∴ ك = ١٢٠

ر = ٥ $^{١٢}ق_{١٠} = ^{١٢}ق_{٢} = ٦٦$

㉑ $^{ن}ق_{ر} \div ^{ن}ق_{ر-١} = ٥$ $\frac{ن - ر + ١}{ر} = ٥$

ن - ٦ر = -١

$^{ن}ق_{ر+١} : ^{ن}ق_{ر} = ٣$ $\frac{ن - ر}{ر+١} = ٣$

ن - ٤ر = ٣ بحل المعادلتين ر = ٢ ، ن = ١١

㉒ الأثبات $\frac{\underline{|ن+١}}{\underline{|ر+١}\ \underline{|ن-ر}} \div \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ر}\ \underline{|ن-ر}} = \frac{ن+١}{ر+١}$

قيمة المقدار $\frac{\frac{^{١٥}ق_{٥}}{^{١٤}ق_{٤}} + ١}{١ + \frac{^{١٣}ق_{٣}}{^{١٤}ق_{٤}}} = \frac{٣ + ١}{١ + \frac{٢}{٧}} = \frac{٢٨}{٩}$

$$\frac{^{١٣}ق_{ر} + ^{١٣}ق_{ر+١}}{^{١٣}ق_{ر-١} + ^{١٣}ق_{ر}} = ٢ \Leftarrow \frac{^{١٤}ق_{ر+١}}{^{١٤}ق_{ر}} = ٢$$

$$\frac{١٤ - ر}{ر+١} = ٢ \Leftarrow ٢ر + ٢ = ١٤ - ر$$

٣ر = ١٢ ∴ ر = ٤

㉕ ∵ $^{ن}ل_{٨} \geqslant ^{ن}ل_{٧}$ ∴ $\frac{^{ن}ل_{٨}}{^{ن}ل_{٧}} \geqslant ١$

∴ $\frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-٨}} \times \frac{\underline{|ن-٧}}{\underline{|ن}} \geqslant ١$ ∴ ن - ٧ ⩾ ١ ن ⩾ ٨

مبدأ العد – التباديل – التوافيق | ١ - ١

⑧ يجب على طالب أن يجيب عن ١٠ أسئلة من ١٣ سؤالًا بشرط أن يجيب عن ٤ أسئلة على الأقل من الأسئلة الخمس الأولى، كم طريقة يمكن بها أن يجيب الطالب؟

أ ١٤٠ ب ١٩٦ ج ٢٨٠ د ٣٤٦

⑨ إذا كان $^{ن+٢}ق_{٤} = ن^{٢} - ٣$ فإن ن تساوى:

أ ٢ ب ٤ ج ٦ د ١٠

ثانيًا: أجب عن الأسئلة الآتية:

⑩ كم طريقة يمكن بها اختيار عدد زوجي وعددين فردين من ٤ أعداد زوجية ، ٥ أعداد فردية.

⑪ كم طريقة يمكن بها اختيار عدد زوجي أو عددين فردين من ٤ أعداد زوجية ، ٥ أعداد فردية.

⑫ كم طريقة يمكن بها توزيع ٨ جوائز بالتساوى على ٤ طلاب.

⑬ كم عددًا مكونًا من أربعة أرقام يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام {١ ، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧}؟

أ مع الإحلال ب بدون إحلال

⑭ إذا كانت س = {٢، ٣، ٤، ٥} ويفرض عدم السماح بتكرار الرقم أوجد عدد كل من الأعداد الآتية المكونة من عناصر س.

أ إذا كان العدد مكونًا من ٣ أرقام بالضبط. ب إذا كان العدد مكونًا من ٣ أرقام على الأقل.

ج إذا كان العدد مكونًا من ٣ أرقام على الأكثر.

⑮ أوجد قيمة كل من ن، ر فى كل مما يأتى:

أ $^{ن}ل_{٢} = ٢$، $^{ن+ر}ل_{٢} = ٩٠$ ب $^{ن}ل_{٤} = ٨٤٠$، $^{٨}ل_{ر} = ٣٣٦$

ج $^{ن}ق_{٢} = ٢١$ ، $^{ن+ر}ل_{٣} = ٩٩٠$ د $^{ن}ق_{ر} = ١٠$ ، $\underline{|ن-ر} = ٦$

⑯ إذا كان $^{ن}ق_{ر} : ^{ن}ق_{ر-١} = ٢ : ٣$ ، $^{ن}ق_{ر-٢} : ^{ن}ق_{ر-١} = ٤ : ٣$ أوجد القيمة العددية لكل من ن، ر.

⑰ أثبت أن $\frac{^{ن}ق_{ر}}{^{ن}ق_{ر} + ^{ن}ق_{ر+١}} = \frac{ر+١}{ن+١}$ ثم استخدم ذلك فى إيجاد قيمة $\frac{^{١٥}ق_{٦} + ^{١٥}ق_{٧}}{^{١٥}ق_{٦}}$.

⑱ أثبت أن $^{ن}ق_{ر} : ^{ن-١}ق_{ر} = \frac{ن}{ن-ر}$ ثم استخدم ذلك فى حل المعادلة $\frac{^{ن}ق_{٨} + ^{ن-١}ق_{٨}}{^{ن-١}ق_{٨}} = ٣$

⑲ إذا كان $^{ن}ق_{ر} = ^{ن}ق_{ر-١}$ ، $^{ن+١}ق_{ر} = \frac{٤٠}{\underline{|ر}} \times ^{ن}ل_{ر-٢}$ أوجد قيمة كل من ن ، ر

⑳ إذا كان $^{ن}ل_{ر} = ١٢٠ \, ^{ن}ق_{ن-ر}$ فاحسب قيمة $^{١٢}ق_{٢ر}$ ثم أوجد أقل قيمة للمتغير ن والتى تجعل العلاقة صحيحة .

㉑ أوجد قيمة كل من ن، ر إذا كان $^{ن}ق_{ر-١} : ^{ن}ق_{ر} : ^{ن}ق_{ر+١} = ١ : ٥ : ١٥$

㉒ أثبت أن $^{ن+١}ق_{ر+١} \div ^{ن}ق_{ر} = \frac{ن+١}{ر+١}$ ثم استخدم ذلك فى إيجاد قيمة $\frac{^{١٥}ق_{٥} + ^{١٤}ق_{٤}}{^{١٤}ق_{٤} + ^{١٣}ق_{٣}}$

㉓ إذا كان $\frac{^{١٣}ق_{ر} + ^{١٣}ق_{ر+١}}{^{١٣}ق_{ر-١} + ^{١٣}ق_{ر}} = ٢$ فأوجد قيمة ر

㉔ إذا كان $^{٣٠}ل_{س} = ^{٣٠}ل_{س+٢ص}$ فما قيمة كل من س ، ص؟

㉕ إذا كان $^{ن}ل_{٨} \geqslant ^{ن}ل_{٧}$ فما قيمة ن؟

㉖ إذا كان: $\underline{|م+ن} = ٣٨٠ \underline{|م+ن-٢}$ فأوجد قيمة م + ن

كتاب الجبر والهندسة الفراغية - الجبر ١١

٢٧ أ ∵ |ن+٢ |٣ن-٤ = |ن |٣ن-٢

$\frac{|ن+٢}{|ن} = \frac{|٣ن-٢}{|٣ن-٤}$ ∴ ${}^{ن+٢}ل_{٢} = {}^{٣ن-٢}ل_{٢}$

∴ ن + ٢ = ٣ن - ٢ ∴ ٢ن = ٤ ∴ ن = ٢

٢٩ $\frac{{}^{ن}ق_{ر+٢}}{{}^{ن}ق_{ر+١}} \geqslant ١$ ، $\frac{ن - ر - ١}{ر + ٢} \geqslant ١$

ن - ر - ١ ⩾ ر + ٢ ، ن ⩾ ٢ر + ٣

٣٠ أ ٤ ${}^{ن}ق_{٥}$ + ٣ ${}^{ن}ق_{٧}$ = ٦ ${}^{ن}ق_{٦}$

$٤ \times \frac{{}^{ن}ق_{٥}}{{}^{ن}ق_{٦}} + ٣ \frac{{}^{ن}ق_{٧}}{{}^{ن}ق_{٦}} = ٦$

$\frac{٢٤}{ن-٥} + ٣ \times \frac{ن - ٦}{٧} = ٦$

$\frac{٨}{ن-٥} + \frac{ن-٦}{٧} = ٢$

٥٦ + ن^{٢} - ١١ن + ٣٠ = ١٤ن - ٧٠

ن^{٢} - ٢٥ن + ١٥٦ = ٠ (ن - ١٢) (ن - ١٣) = ٠

ن = ١٢ أو ن = ١٣

ب $(٣ \times {}^{١٤}ق_{ر})^{٢} = ٢ \times {}^{١٤}ق_{ر+١} \times ٦ \times {}^{١٤}ق_{ر-١}$

$٩ \times {}^{١٤}ق_{ر} \times {}^{١٤}ق_{ر} = ١٢ \times {}^{١٤}ق_{ر+١} \times {}^{١٤}ق_{ر-١}$

$٣ \times \frac{{}^{١٤}ق_{ر}}{{}^{١٤}ق_{ر-١}} = ٤ \times \frac{{}^{١٤}ق_{ر+١}}{{}^{١٤}ق_{ر}}$

$٣ \times \frac{١٤ - ر + ١}{ر} = ٤ \times \frac{١٤ - ر}{ر+١}$

$٣ \times \frac{١٥ - ر}{ر} = ٤ \times \frac{١٤ - ر}{ر+١}$

٥٦ ر - ٤ ر^{٢} = -٣ ر^{٢} + ٤٢ ر + ٤٥

ر^{٢} - ١٤ ر + ٤٥ = ٠

ر = ٥ ، ر = ٩

٣٠ عدد القطع المستقيمة التى تصل كل منها من نقطتين =

${}^{٤}ق_{٢}$ = ٦ قطع

٣٥ عدد الطرق = ${}^{٥}ق_{٣} \times {}^{٩}ق_{٤}$

٣٧ أ ٤ ب ١٠ ج ٢٠

---

٢٧ حل كل من المعادلات الآتية:

أ |ن+٢ |٣ن-٤ = |ن |٣ن-٢ ب ٢ |٢ن = (ن^{٢} + ٣ن + ٢) (|ن)^{٢}

ج |٢ن |ن-٣ = ٧٢ |٣ن-٧

٢٨ أثبت أن ${}^{ن}ق_{ر}$: ${}^{ن-١}ق_{ر-١}$ = $\frac{ن}{ر}$ ثم استخدم ذلك فى إيجاد قيمة كل من ن، ر

إذا كان ${}^{ن+٢}ق_{ر+١}$ = ٩ ${}^{ن+١}ق_{ر}$ = ٩٠ × ${}^{ن}ق_{ر-١}$

٢٩ إذا كان ${}^{ن}ق_{ر+٢} \geqslant {}^{ن}ق_{ر+١}$ أثبت أن ن ⩾ ٢ر + ١

٣٠ **الارتباط بالمتتابعات :**

أ إذا كان ٤ × ${}^{ن}ق_{٥}$ ، ٣ × ${}^{ن}ق_{٦}$ ، ٣ × ${}^{ن}ق_{٧}$ تكون متتابعة حسابية أوجد قيمة ن

ب إذا كان ٢ × ${}^{١٤}ق_{ر+١}$ ، ٣ × ${}^{١٤}ق_{ر}$ ، ٦ × ${}^{١٤}ق_{ر-١}$ فى تتابع هندسى فأوجد قيمة ر.

٣١ أوجد قيمة كل من ن، ر فى كل مما يأتى:

أ ${}^{ن}ق_{ر}$: ${}^{ن}ق_{ر+١}$: ${}^{ن}ق_{ر+٢}$ = ١ : ٢ : ٣ ب ${}^{ن}ق_{ر}$: ${}^{ن}ق_{ر+٢}$: ${}^{ن}ق_{ر+١}$ = ١٥ : ٢٨ : ٢٤

ج ${}^{ن}ق_{ر}$: ${}^{ن}ق_{ر+٢}$: ${}^{ن}ق_{ر+٤}$ = ٣ : ١٤ : ١٤ د ${}^{ن}ق_{ر}$: ${}^{ن}ق_{ر-١}$ = ٩ : ٥ ، ${}^{١٥}ق_{ر}$ = ${}^{١٥}ق_{٣ر-٥}$

هـ ${}^{٣٠}ق_{ر}$: ${}^{٣٠}ق_{ر+١٠}$ = ، ${}^{ن}ل_{٧}$ = ٩٠ × ${}^{ن-٢}ل_{٥}$

٣٢ لدينا ٤ نقاط فى مستوى واحد، وليست على استقامة واحدة ، أوجد عدد القطع المستقيمة التى تصل كل منها بين نقطتين؟

٣٣ كم طريقة يمكن بها اختيار ثلاثة أشخاص من بين خمسة أشخاص؟

٣٤ كم طريقة يمكن بها انتخاب لجنة للطلبة بها أعضاء من بين ٢٠ طالبًا وعشر طالبات، بحيث تتكون اللجنة من ٤ طلاب وطالبتين؟

٣٥ كم طريقة يمكن بها تكوين فريق من سبعة أعضاء من بين تسع بنات وخمسة أولاد، بحيث يحتوى الفريق علي ثلاثة أولاد فقط؟

٣٦ كم طريقة يمكن بها انتخاب لجنتين كل منهما تتكون من ٣ أشخاص من بين ١٢ شخصًا بحيث لايدخل شخص فى اللجنتين فى ذات الوقت؟

٣٧ أوجد عدد المثلثات الناتجة من توصيل ٣ رؤوس لمضلع عدد أضلاعه:

أ ٤ ب ٥ ج ٦

٣٨ أوجد عدد الأقطار لمضلع عدد أضلاعه:

أ ٦ ب ٨ ج ١٢

٣٩ يُراد تكوين لجنة من ٤ أشخاص من بين ٩ رجال ، ٣ نساء:

أ أوجد عدد الطرق المختلفة لتكوين هذه اللجنة.

ب كم لجنة تحتوى على امرأة واحدة فقط؟

ج كم لجنة تحتوى على امرأة واحدة على الأقل؟

الوحدة الأولى

١ - ٢ نظرية ذات الحدين بأس صحيح موجب

Binomail Theorem in integer positive power

الوحدة الأولى

١ - ٢

نظرية ذات الحدين بأسٍّ صحيح موجب

Binomial theorem in integer positive power

سوف تتعلم

- الربط بين مثلث باسكال ومعاملات مفكوك ذى الحدين.
- الصورة العامة لمفكوك $(س + أ)^{ن}$ حيث $ن \in ص^{+}$
- الصورة العامة للحد العام $ح_{ر+١}$ من مفكوك $(س + أ)^{ن}$
- رتبة وقيمة الحد الأوسط والحدين الأوسطين

مصطلحات أساسية

- مفكوك *The expansion*
- ذات حدين *Binomial*
- الحد العام *The general term*
- الحد الأوسط *The middle term*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية *Scientific calculator*
- برامج رسومية *Graphical programs*

فكر و ناقش

نعلم أن:

$(س + أ)^{١} = س + أ$

$(س + أ)^{٢} = س^{٢} + ٢س أ + أ^{٢}$

ويمكن استنتاج أن:

$(س + أ)^{٣} = س^{٣} + ٣س^{٢} أ + ٣س أ^{٢} + أ^{٣}$

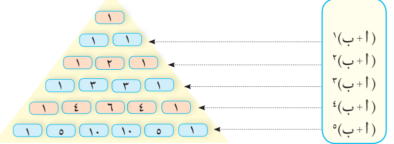
$(س + أ)^{٤} = س^{٤} + ٤س^{٣} أ + ٦س^{٢} أ^{٢} + ٤س أ^{٣} + أ^{٤}$:

- ما العلاقة بين عدد الحدود وقيمة الأس؟
- ماذا العلاقة بين قوى المتغيرين أ ، ب فى كل حد من حدود المفكوك؟
- ماذا تلاحظ عن معاملات الحدود فى كل حدود المفكوك؟
- هل يمكن استخدام مثلث باسكال للتعبير عن المعاملات؟
- حاول استنتاج قاعدة إيجاد مفكوك $(أ + ب)^{ن}$

مثلث باسكال *Pascal triangle*

لاحظ أن: معاملات المفكوك تتبع نمطًا يمثله مثلث باسكال

المقدار ذو الحدين — معاملات حدود المفكوك



- يمكن كتابة مثلث باسكال باستخدام التوافيق كما فى الشكل التالى:

خلفية:

يُعد اسحاق نيوتن من أبرز العلماء مساهمة فى تطور علم التفاضل والتكامل، بالإضافة الى مساهمته فى دراسة المتسلسلات وتعاونه مع بليز باسكال فى تطور نظرية ذات الحدين. وهذا ما سوف نتطرق لدراسته فى هذا الدرس وهما موضوعان أساسيان فى علم الرياضيات وهما:

- نظرية ذات الحدين. - مثلث باسكال.

مخرجات الدرس:

- يتعرف على نظرية ذات الحدين.
- يتعرف مثلث باسكال.
- يوجد ناتج مقدار ذى حدين مرفوع لقوة صحيحة موجبة.
- يستنتج الصورة العامة لمفكوك $(س + أ)^{ن}$ حيث $ن \in ص^{+}$
- يوجد الصورة العامة للحد العام $ح_{ر+١}$
- من مفكوك $(س + أ)^{ن}$
- يحسب رتبه الحد الأوسط والحدان الأوسطان .
- يوجد قيمة الحد الأوسط والحدان الأوسطان.
- و يحل مسائل باستخدام مفكوك ذات الحدين.

مفردات أساسية:

مفكوك - ذات الحدين - مثلث باسكال - الحد العام - الحد الأوسط - رتبه

المواد التعليمية المستخدمة:

السبورة التعليمية - آلة حاسبة علمية - أقلام

طرق التدريس المقترحة:

العرض المباشر - المناقشة - العصف الذهنى - حل المشكلات - الاكتشاف.

مكان التدريس :

الفصل الدراسى

مصادر التعلم:

كتاب الطالب من ص١٤ الى ص٢٤

التهيئة:

- استخدم الخلفية النظرية المدونه فى بداية كتاب المعلم عن العالين اسحاق نيوتن وبليز باسكال.
- اطلب من طلابك البحث فى الشبكة العنكبوتية عن المزيد من أعمال هذين العالمين.

إجراءات الدرس:

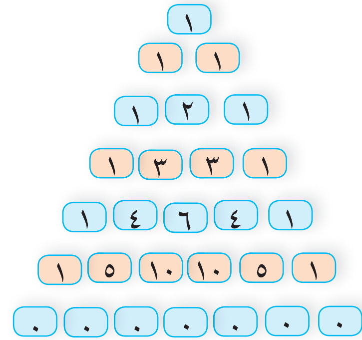
بند فكر وناقش:

- أعط طلابك المثال بايجاد مفكوك $(أ + ب)^{ن}$ عندما ن = ١، ٢، ٣، ٤
- يمكن اعداد هذا النشاط فى صورة تعلم تعاونى بين أعضاء المجموعات بعد تقسيمهم (٦-٨)
- أعط الفرصة لطلابك لمناقشة الأسئلة الواردة فى فكر وناقش.

- دون اجاباتهم على كل سؤال.
- ناقش اجابات الطلاب لكل مجموعة.
- توصل مع طلابك لقاعدة ايجاد مفكوك (أ + ب)^{ن}
- اعرض عليهم نموذج مثلث باسكال.
- قارن اجاباتهم بالنموذج.
- ناقش مع طلابك خواص مثلث باسكال.

نشاط:

- اطلب من طلابك نسخ مثلث باسكال على ورقة. واطلب منهم رسم أقطار تفصل بين كل مجموعة من الأعداد القطرية.
- مد الأقطار ولاحظ ما سيتم التوصل إليه.



- اترك للطلاب فرصة للتفكير فى كيفية اكتشاف النمط واستكماله.
- اكتشف مع طلابك خواص المثلث ووضح لطلابك كيف يمكن كتابة مثلث باسكال باستخدام التوافيق بالاستعانة بشكل ص١٥.

تعبير شفهى:

- ناقش- مع طلابك الفقرتين (أ)، (ب) لتوضيح كيف يمكن كتابة (أ + ب)^{٦} على صورة توافيق.

الوحدة الأولى: التباديل والتوافيق ونظرية ذات الحدين

معاملات مفكوك (أ + ب)^{١}
معاملات مفكوك (أ + ب)^{٢}
معاملات مفكوك (أ + ب)^{٣}
معاملات مفكوك (أ + ب)^{٤}
معاملات مفكوك (أ + ب)^{٥}

١
$^{١}ق_{٠}$ $^{١}ق_{١}$
$^{٢}ق_{٠}$ $^{٢}ق_{١}$ $^{٢}ق_{٢}$
$^{٣}ق_{٠}$ $^{٣}ق_{١}$ $^{٣}ق_{٢}$ $^{٣}ق_{٣}$
$^{٤}ق_{٠}$ $^{٤}ق_{١}$ $^{٤}ق_{٢}$ $^{٤}ق_{٣}$ $^{٤}ق_{٤}$
$^{٥}ق_{٠}$ $^{٥}ق_{١}$ $^{٥}ق_{٢}$ $^{٥}ق_{٣}$ $^{٥}ق_{٤}$ $^{٥}ق_{٥}$

بملاحظة الصف الثالث من مثلث باسكال نلاحظ أن ١، ٢، ١ تمثل $^{٢}ق_{٠}$، $^{٢}ق_{١}$، $^{٢}ق_{٢}$ على الترتيب وأن $^{٢}ق_{٠}$، $^{٢}ق_{١}$، $^{٢}ق_{٢}$ تمثل المجموعات الجزئية التى يمكن تكوينها من مجموعة تحتوى على عنصرين حيث $^{٢}ق_{٠} + {}^{٢}ق_{١} + {}^{٢}ق_{٢} = ٤ = ٢^{٢}$

المجموعة { س ، ص} مجموعتها الجزئية ϕ ، {س} ، {ص}،{ س ، ص}

وبالمثل فإن:

$^{٣}ق_{٠}$، $^{٣}ق_{١}$ ، $^{٣}ق_{٢}$ ، $^{٣}ق_{٣}$ تمثل عدد المجموعات الجزئية التى نحصل عليها من مجموعة تحتوى على ٣ عناصر وعدد هذه المجموعات ٨ = $٢^{٣}$

أى $^{٣}ق_{٠} + {}^{٣}ق_{١} + {}^{٣}ق_{٢} + {}^{٣}ق_{٣} = ٢^{٣}$

وعلى وجه العموم إذا كان لدينا مجموعة عدد عناصرها ن فإن عدد المجموعات الجزئية التى يمكن الحصول عليها منها = $٢^{ن}$ أي $^{ن}ق_{٠} + {}^{ن}ق_{١} + {}^{ن}ق_{٢} + ... + {}^{ن}ق_{ن} = ٢^{ن}$

تعبير شفهى:

١) أوجد معاملات (أ + ب)^{٦} على صورة توافيق. ٢) أوجد معاملات (أ -ب) ^{٥} على صورة توافيق.

تعلم

مفكوك ذى الحدين

إذا كان أ ، س$\in$ ع ، ن $\in$ ص$^{+}$ يكون:

١- $(س + أ)^{ن} = س^{ن} + {}^{ن}ق_{١} س^{ن-١}أ + {}^{ن}ق_{٢} س^{ن-٢} أ^{٢} + ... + أ^{ن}$

٢- $(س - أ)^{ن} = س^{ن} - {}^{ن}ق_{١} س^{ن-١}أ + {}^{ن}ق_{٢} س^{ن-٢} أ^{٢} - ... + (-أ^{ن})$

ملاحظات على مفكوك ذى الحدين $(س + أ)^{ن}$

١) عدد حدود المفكوك ن + ١ حدًّ
٢) المفكوك مرتب حسب قوى س تنازليًّا ومرتب حسب قوى أ تصاعديًّا.
٣) مجموع قوى س وقوى أ فى أى حد يساوى ن.
٤) دليل ق فى أى حد من حدود المفكوك يقل واحدًا صحيحًا عن رتبة ذلك الحد .

١٤ الصف الثالث الثانوى - كتاب الطالب

أخطاء شائعه:

قد يخطئ بعض الطلاب ويقوموا بجمع حدودًا غير متشابهة مثل: ٢س^{٢}ص، ٢ص^{٢}س والعلاج يكون بالتأكيد على الطلاب بتحديد الحدود المتشابهة أولًا قبل اجراء عملية الجمع. ثم اطلب من الطلاب وضع الحدود المتشابهة أسفل بعضها وجمع معاملاتها.

- وضح كيف تستخدم التوافيق لايجاد معاملات (أ + ب)^{٥}

فى بند تعلم:

اطلب من الطلاب بعد دراسة المفكوكات التى قاموا باجراءها فى هذا الدرس عمل قائمة بالتعميمات والملاحظات التى تتضمن ما يلى:

- عدد حدود المفكوك (س + أ)^{ن} هو ن + ١ حدًا.
- الحد الأول هو س^{ن} والحد الأخير هو أ^{ن} ولكليهما المعامل ١.
- تتناقص أسس المتغير س بمقدار ١ فى حين تتزايد أسس أ بمقدار ١
- مجموع أسس كل حد يساوى ن

مثال

كتابة مفكوك ذات الحدين

(١) اكتب مفكوك $(٢س + ٣ص)^{٤}$

الحل

$(٢س + ٣ص)^{٤} = (٢س)^{٤} + {}^{٤}و_{١}(٢س)^{٣}(٣ص) + {}^{٤}و_{٢}(٢س)^{٢}(٣ص)^{٢} + {}^{٤}و_{٣}(٢س)(٣ص)^{٣} + (٣ص)^{٤}$

$= ١٦س^{٤} + ٩٦س^{٣}ص + ٢١٦س^{٢}ص^{٢} + ٢١٦س ص^{٣} + ٨١ص^{٤}$

حاول أن تحل

(١) اكتب مفكوك:

أ $(٣س + ص)^{٥}$ ب $(س^{٢} - ١)^{٦}$

حالات خاصة من مفكوك ذى الحدين:

أ $(١ + س)^{ن} = ١ + {}^{ن}و_{١}س + {}^{ن}و_{٢}س^{٢} + ... + س^{ن}$

ب $(١ - س)^{ن} = ١ - {}^{ن}و_{١}س + {}^{ن}و_{٢}س^{٢} - ... + (-س)^{ن}$

مثال

(٢) اكتب مفكوك $(١ + س)^{٦}$، ثم استخدم ذلك فى إيجاد قيمة عددية للمقدار: ${}^{٦}و_{٠} + {}^{٦}و_{١} + {}^{٦}و_{٢} + ... + {}^{٦}و_{٦}$

الحل

$(١ + س)^{٦} = ١ + {}^{٦}و_{١}س + {}^{٦}و_{٢}س^{٢} + {}^{٦}و_{٣}س^{٣} + {}^{٦}و_{٤}س^{٤} + {}^{٦}و_{٥}س^{٥} + س^{٦}$

بوضع س = ١ فى الطرفين

$(١ + ١)^{٦} = ١ + {}^{٦}و_{١} + {}^{٦}و_{٢} + {}^{٦}و_{٣} + ... + ١$

$٢^{٦} = {}^{٦}و_{٠} + {}^{٦}و_{١} + {}^{٦}و_{٢} + {}^{٦}و_{٣} + ... + {}^{٦}و_{٦}$

حاول أن تحل

(٢) اكتب مفكوك $(١ - س)^{٨}$، ثم استخدم ذلك فى إيجاد قيمة: $١ - {}^{٨}و_{١} + {}^{٨}و_{٢} - {}^{٨}و_{٣} + ... + {}^{٨}و_{٨}$

مثال

(٣) أوجد قيمة $(١,٠١)^{٩}$، مُقربًا الناتج لثلاثة أرقام عشرية، مستخدمًا نظرية ذات الحدين.

الحل

$(١,٠١)^{٩} = (١ + ٠,٠١)^{٩}$

$= ١ + {}^{٩}و_{١}(\frac{١}{١٠٠}) + {}^{٩}و_{٢}(\frac{١}{١٠٠})^{٢} + {}^{٩}و_{٣}(\frac{١}{١٠٠})^{٣} + ..$

$= ١ + ٠,٠٩ + ٠,٠٠٣٦ + ٠,٠٠٠٠٨٤ + ..$ حدود أقل من ٠,٠٠١

$= ١,٠٩٣٦ \simeq ١,٠٩٤$

حاول أن تحل

(٣) أوجد قيمة$(٠,٩٨)^{١٠}$ باستخدام نظرية ذات الحدين، مقربًا الجواب لأقرب ثلاثة أرقام عشرية.

أخطاء شائعه:

⌑ أكد على طلابك أن استخدام مفكوك ذات الحدين هو سهل فى تطبيقه ولكن هناك بعض الأخطاء مثل:

حساب: $-٢^{٢}$ و $(-٢)^{٢}$

مثال : ١ ص ١٦

⌑ اطلب الى طلابك استخدام ذات الحدين فى حل المثال. وهو تطبيق مباشر.

التقييم: الحوار والمناقشة:

⌑ ناقش مع طلابك بند حاول أن تحل (١) وتوصل معهم للاجابات الصحيحة

نظرية ذى الحدين بأس صحيح موجب

حاول أن تحل (١) ص١٦

أ $(٣س + ص)^{٥} = ٢٤٣س^{٥} + ٤٠٥س^{٤}ص + ٢٧٠س^{٣}ص^{٢} + ٩٠س^{٢}ص^{٣} + ١٥س ص^{٤} + ص^{٥}$

⌑ توصل مع طلابك لمجموعة من الاستنتاجات بعد التأكد من فهمهم للأمثلة الواردة فى ص١٦.

التقييم: الحوار والمناقشة

⌑ ناقش مع طلابك بند حاول أن تحل (٢)وتوصل معهم للاجابات الصحيحة.

(٢) $(١ - س)^{٨} = ١ - {}^{٨}و_{١}س + {}^{٨}و_{٢}س^{٢} - {}^{٨}و_{٣}س^{٣} + {}^{٨}و_{٤}س^{٤} + {}^{٨}و_{٥}س^{٥} + {}^{٨}و_{٦}س^{٦} + {}^{٨}و_{٧}س^{٧} + {}^{٨}و_{٨}س^{٨}$

بوضع س = ١

حاول أن تحل (٣)

$(٠,٩٨)^{١٠} = (١ - ٠,٠٢)^{١٠} = ١ - ١٠ و_{١}(٠,٠٢) + {}^{١٠}و_{٢}(٠,٠٢)^{٢}$

$\simeq ٠,٨١٧$

تمرين اضافى:

استخدم نظرية ذات الحدين لايجاد مفكوك كل من

أ $(س - ٢)^{٥}$ ب $(م + ل)^{٤}$ ج $(ص + ع)^{٩}$

التقييم: الحوار والمناقشة

¤ ناقش مع طلابك بند حاول أن تحل وتوصل معهم الى الاجابات الصحيحة

(٣) $(١ - س)^٦ (١ + س)^٦ = (١ - س^٢)^٦$

¤ ناقش مع طلابك مفكوك $(١ - س٢)^٦$

¤ قسم طلابك الى فريقين فريق يعوض عن س = ٢ فى الطرف الأيمن والآخر يعوض عن س = ٢ فى الطرف الأيسر للتأكد من التساو = ٧٢٩

تمارين اضافية (اثرائية)

أوجد مفكوك

أ $(١ + ٢س)^٦$ ب $(س - \frac{١}{٣س})^٥$

ب عند حل يمكن استخدام المفكوك بالطريقة العادية

ويمكن حلها بطريقة أخرى كالتالى:

¤ يمكن اخراج س عامل مشترك لجعل المقدار على الصورة $(١ - س)^٦$

$$\therefore (س - \frac{١}{٣س^٢})^٥ = س^٥ (١ - \frac{١}{٣س^٣})^٥$$

$$= س^٥ \; [(١ - {}^{٥}ق_{١} (\frac{١}{٣س^٣}) + {}^{٥}ق_{٢} (\frac{١}{٣س^٣})^٢$$

$$- {}^{٥}ق_{٣} (\frac{١}{٣س^٣})^٣ + {}^{٥}ق_{٤} (\frac{١}{٣س^٣})^٤ - (\frac{١}{٣س^٣})^٥ \;]$$

$$= س^٥ \; [(١ - (\frac{٥}{٣س^٣}) + \frac{١٠}{٩س^٦} - \frac{١٠}{٢٧س^٩} + \frac{٥}{٨١س^{١٢}} - \frac{١}{٢٤٣س^{١٥}})$$

$$= س^٥ - \frac{٥}{٣} س^٢ + \frac{١٠}{٩س} - \frac{١٠}{٢٧س^٤} + \frac{٥}{٨١س^٧} - \frac{١}{٢٤٣س^{١٠}}$$

الحد العام من مفكوك ذات الحدين

¤ يجب التأكيد على أن:

الحد العام من مفكوك $(أ + ب)^ن$ أى $ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر} (ب)^ر$

حيث ر = ٠، ١، ٢، ٣ ....،

حاول أن تحل (٥) ص١٧

$ح_٣ = {}^{٧}ق_{٢} (٢س)^٥ (\frac{١}{٢})^٢ = ١٦٨ س^٥$

$ح_٧ = {}^{٧}ق_{٦} (٢س) (\frac{١}{٢})^٦ = \frac{٧}{٣٢} س$

$\because ح_٣ = ٣ح_٧$ $\therefore ١٦٨ س^٥ = ٣ \times \frac{٧}{٣٢} س$

$\because س \neq ٠$ $\therefore س^٤ = \frac{١}{٢٥٦}$ $\therefore س = \pm \frac{١}{٤}$

الحد العام من مفكوك ذات الحدين *The general term of the expansion of binomial*

فى مفكوك $(س + ص)^ن = س^ن + {}^{ن}ق_{١} س^{ن-١} ص + {}^{ن}ق_{٢} س^{ن-٢} ص^٢ + ... + ص^ن$

لاحظ أن $ح_٢ = {}^{ن}ق_{١} س^{ن-١} ص^١$ ، $ح_٣ = {}^{ن}ق_{٢} س^{ن-٢} ص^٢$

وبالمثل يكون: $ح_٩ = {}^{ن}ق_{٨} س^{ن-٨} ص^٨$

وبفرض الحد العام $ح_{ر+١}$ حيث $٠ \leqslant ر \leqslant ن$ فإن حيث $ح_{ر+١}$ يمكن كتابته على الصورة:

$$ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر} (س)^{ن-ر} (ص)^ر$$

مثال

(٤) من مفكوك $(س + \frac{٢}{س})^٨$ **أوجد معامل الحد السادس**

الحل

$ح_٦ = {}^{٨}ق_{٥} (س)^٣ (\frac{٢}{س})^٥ = {}^{٨}ق_{٥} \times ٢^٥ س^{-٢} = ١٧٩٢ س^{-٢}$

ومعامل هذا الحد = ١٧٩٢

لاحظ معامل $ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر}$ (معامل الحد الأول)$^{ن-ر}$ (معامل الحد الثانى)^ر

حاول أن تحل

(٤) فى مفكوك $(٢س^٢ + \frac{١}{٣})^٧$، أوجد كل من $ح_٣$ ، $ح_٧$ حسب قوى س التنازلية، و إذا كان $ح_٣ = ح_٧$ ، أوجد قيمة س

مثال

(٥) من مفكوك $(٣س^٢ - \frac{١}{٢س})^{١٣}$ ، أوجد الحد العاشر من النهاية.

الحل

الحد العاشر من النهاية فى مفكوك $(٣س^٢ - \frac{١}{٢س})^{١٣}$ هو الحد العاشر من البداية فى مفكوك $(\frac{-١}{٢س} + ٣س^٢)^{١٣}$

$ح_{١٠} = {}^{١٣}ق_{٩} (\frac{-١}{٢س})^٤ (٣س^٢)^٩ = \frac{٧١٥ \times ٣^٩}{٢^٤} س^{١٤}$

حل آخر

لاحظ أنه يمكن حساب رتبة الحد العاشر من النهاية فى مفكوك $(٣س^٢ - \frac{١}{٢س})^{١٣}$، وتكون رتبته مساوية لعدد الحدود: - ١٠ + ١ = ١٤ - ١٠ + ١ = ٥

$ح_{١٠}$ من النهاية هو $ح_٥$ من البداية $ح_٥ = {}^{١٣}ق_{٤} (٣س^٢)^٩ (\frac{-١}{٢س})^٤ = \frac{٧١٥ \times ٣^٩}{٢^٤} س^{١٤}$

حاول أن تحل

(٥) من مفكوك $(٢س - \frac{١}{٣س^٢})^{١١}$ أوجد الحد الرابع من النهاية:

قاعدة

١) $(س + أ)^ن + (س - أ)^ن = ٢ (ح_١ + ح_٣ + ح_٥ + ...)$ ٢) $(س + أ)^ن - (س - أ)^ن = ٢ (ح_٢ + ح_٤ + ح_٦ + ...)$

١٦   الصف الثالث الثانوى - كتاب الطالب

حاول أن تحل (٦) ص١٨

$ح_٤$ من النهاية فى المفكوك

$(٢س - \frac{١}{٣س^٢})^{١١}$ هو $ح_٤$ من البداية فى مفكوك

$(\frac{-١}{٣س^٢} + ٢س)^{١١}$ هو ${}^{١١}ق_{٣} (\frac{-١}{٣س^٢})^٨ (٢س)^٣ = \frac{٤٤٠}{٢١٨٧} س^{-١٣}$

حاول أن تحل (٧) ص١٨

أ) $(١+\sqrt{س})^{٥} - (١-\sqrt{س})^{٥}$

$= ٢(ح_{٢} + ح_{٤} + ح_{٦})$

$= ٢({}^{٥}ق_{١}\sqrt{س} + {}^{٥}ق_{٣}(\sqrt{س})^{٣} + (\sqrt{س})^{٥})$

$= ٢\sqrt{س}\,(٥ + ١٠س + س^{٢})$

ب) $(١,٠٣)^{٨} + (٠,٩٧)^{٨}$

$= (١+٠,٠٣)^{٨} + (١-٠,٠٣)^{٨}$

$= ٢(ح_{١} + ح_{٣} + ح_{٥} + ح_{٧} + ح_{٩})$

$= ٢(١ + {}^{٨}ق_{٢}(٠,٠٣)^{٢} + {}^{٨}ق_{٤}(٠,٠٣)^{٤} + ...)$

$= ٢(١ + ٠,٠٢٥٢ + ٠,٠٠٠٠٥٦٧ + ...) \simeq ٢,٠٥١$

حاول أن تحل (٧) ص١٨

$(١-س)^{٨} + {}^{٨}ق_{١}(١-س)^{٧}(٣س) + {}^{٨}ق_{٢}(١-س)^{٦}(٣س)^{٢}$
$+ ...... + (٣س)^{٨}$

$= ((١-س) + (٣س))^{٨} = (١+٢س)^{٨}$

$ح_{٦} = {}^{٨}ق_{٥}(٢س)^{٥} = ١٧٩٢\,س^{٥}$

عندما س = ١ فإن القيمة العددية للحد السادس = ١٧٩٢

ملاحظات حول الأمثلة الواردة بالكتاب ص ١٨

- لاحظ أن كل مثال من الأمثلة الواردة فى ص ١٨ له مطلوب مختلف وتشمل على نوعيات مختلفة ومتنوعة من المطلوب ولكن ننبه إلى بند حاول أن تحل هو تطبيق لما أخذ فى المثال
- يمكن أعطاء الطلاب الفرصة للحل الفردى لحاول أن تحل بعد مناقشة الأمثلة الواردة فى الكتاب

مثال

٦) $(س+٢)^{٦} + (س-٢)^{٦}$

الحل

$(س+٢)^{٦} + (س-٢)^{٦} = ٢(ح_{١} + ح_{٣} + ح_{٥} + ح_{٧})$

$= ٢(س^{٦} + {}^{٦}ق_{٢}س^{٤}\times ٢^{٢} + {}^{٦}ق_{٤}س^{٢}\times ٢^{٤} + ٢^{٦}) = (س^{٦} + ٦٠س^{٤} + ٢٤٠س^{٢} + ٦٤)$

حاول أن تحل

٦) أوجد فى أبسط صورة $(١+\sqrt{س})^{٥} - (١-\sqrt{س})^{٥}$

٢) أوجد لأقرب ثلاثة أرقام عشرية $(١,٠٣)^{٨} + (٠,٩٧)^{٨}$، مستخدمًا نظرية ذات الحدين.

مثال

٧) من مفكوك $(٣+س)^{١١} - {}^{١١}ق_{١}(٣+س)^{١٠}(١-٢س) + {}^{١١}ق_{٢}(٣+س)^{٩}(١-٢س)^{٢} ... (١-٢س)^{١١}$ أوجد الحد الخامس.

الحل

المقدار يمثل مفكوك $[(٣+س) - (١-٢س)]^{١١} = (٢+٣س)^{١١}$

ويكون :

$ح_{٥} = {}^{١١}ق_{٤}(٢)^{٧}(٣س)^{٤} = ٣٣٠ \times ٢^{٧} \times ٣^{٤}س^{٤} = ٣٤٢١٤٤٠\,س^{٤}$

حاول أن تحل

٧) من مفكوك $(١-س)^{٨} + ٢٤س(١-س)^{٧} + ٢٥٢س^{٢}(١-س)^{٧} + ... + ٦٥٦١س^{٨}$، أوجد القيمة العددية للحد السادس عندما س = ١

مثال

٨) إذا كان $(١+جـ س)^{ن} = ١ + ٢٠س + أ_{١}س^{٢} + أ_{٢}س^{٣} + ... + أ^{ن}س^{ن}$

وكان $١٦أ_{١} = ٣أ_{٢}$ أوجد قيمة كل من ن، جـ حيث جـ $\neq ٠$

الحل

$(١+جـ س)^{ن} = ١ + {}^{ن}ق_{١}جـ س + {}^{ن}ق_{٢}جـ^{٢}س^{٢} + {}^{ن}ق_{٣}جـ^{٣}س^{٣} + ...$

$\therefore {}^{ن}ق_{١}جـ = ٢٠$ $\quad \therefore ن جـ = ٢٠$ $\quad \therefore جـ = \frac{٢٠}{ن}$ (١)

$\because ١٦ \times {}^{ن}ق_{٢}جـ^{٢} = ٣ \times {}^{ن}ق_{٣}جـ^{٣}$ $\quad \therefore ١٦ \times {}^{ن}ق_{٢} = ٣ \times {}^{ن}ق_{٣}جـ$ (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢) $\quad \therefore ١٦ \times {}^{ن}ق_{٢} = ٣ \times {}^{ن}ق_{٣} \times \frac{٢٠}{ن}$

$\therefore ١٦ن = ٣ \times \frac{{}^{ن}ق_{٣}}{{}^{ن}ق_{٢}} \times ٢٠$ $\quad \therefore ن = ٣ \times \frac{ن-٢}{٣} \times ٢٠$ $\quad \therefore ن = ١٠$

بالتعويض فى المعادلة (١) $\quad \therefore جـ = \frac{٢٠}{١٠} = ٢$

حاول أن تحل (٩) ص١٩

معامل $ح_٣ = {}^{١٠}ق_٢ \, جـ^٢$ ∴ $١٨٠ = ٤٥ \, جـ^٢$

$جـ^٢ = ٤$ ∴ $جـ = \pm ٢$

$ح_٥ = {}^{١٠}ق_٤ (جـ س)^٤$ ∴ $٢١٠ = ٢١٠ \, جـ^٤ \, س^٤$

∴ $١ = ١٦ \, س^٤$ ∴ $س^٤ = \frac{١}{١٦}$

∴ $س = \pm \frac{١}{٢}$

حاول أن تحل (١٠) ص١٩

فى مفكوك $(١ + س + س^٢)^٥ = (١ + (س + س^٢))^٥$

$ح_{ر+١} = {}^{٥}ق_ر \times (س + س^٢)^ر$

$= {}^{٥}ق_ر \, س^ر \times (١ + س)^ر$

$= {}^{٥}ق_ر \, س^ر \cdot {}^{ر}ق_م \, س^م$

$= {}^{٥}ق_ر \cdot {}^{ر}ق_م \, س^{ر+م}$

$ر + م = ٢$ ، $٢ \geqslant ر \geqslant م$

∴ $ر = ٢$ $م = ٠$ $ر = ١$ $م = ١$

معامل $س^٢ = {}^{٥}ق_٢ \cdot {}^{٢}ق_٠ + {}^{٥}ق_١ \times {}^{١}ق_١ = ١٥$

تمارين اثرائية

(١) اذا كان الحد التاسع فى مفكوك $(س^٢ - س^{-٢})^{١١}$ يساوى ١٦٥ فأوجد قيمة س الحقيقية؟

الحل:

$ح_٩ = ح_{٨+١}$

$= {}^{١١}ق_٨ (- س^{-٢})^٨ (س^٢)^{١١-٨}$

$= {}^{١١}ق_٨ (- س^{-٢})^٨ (س^٢)^٣$

$= {}^{١١}ق_٣ \times س^{-١٦} \times س^٦$ حيث ${}^{١١}ق_٨ = {}^{١١}ق_٣$

$= \frac{١١ \times ١٠ \times ٩}{٣ \times ٢ \times ١} \times س^{-١٠} = ١٦٥ \, س^{-١٠}$

∵ $ح_٩ = ١٦٥$ ∴ $١٦٥ \, س^{-١٠} = ١٦٥$

$س^{-١٠} = ١$ ∴ $س^{١٠} = ١$

∴ $س^{١٠} = (\pm ١)^{١٠}$ $س = \pm ١$

(٢) فى مفكوك $(١ + س)^ن$ حسب قوى س التصاعدية ، اذا كان معامل $ح_٥$ يساوى معامل $ح_٩$ فأوجد قيمة ن ثم اذا كان الحد الرابع فى هذا المفكوك يساوى -٢٧ فأوجد قيمة س.

حاول أن تحل

(٨) من مفكوك $(١ + جـ س)^{١٠}$ إذا كان معامل الحد الثالث يساوى ١٨٠، وكان الحد الخامس ٢١٠ أوجد قيمة كل من جـ ، س حيث جـ عدد صحيح موجب.

مثال

(٩) أوجد معامل $س^{١٠}$ فى مفكوك $(١ + س - س^٢)^٩$

الحل

فى مفكوك $(١ + (س - س^٢))^٩$

∵ $ح_{ر+١} = {}^{٩}ق_ر \times (س - س^٢)^ر$ ∴ $ح_{ر+١} = {}^{٩}ق_ر \times س^ر \times (١ - س)^ر$

∴ $ح_{ر+١} = {}^{٩}ق_ر \times س^ر \times {}^{ر}ق_م (- س)^م$ ∴ $ح_{ر+١} = (-١)^م \times {}^{٩}ق_ر \times {}^{ر}ق_م \times س^{ر+م}$

∴ $س^{١٠} = س^{ر+م}$

$ر + م = ١٠$ حيث $١٠ > ر \geqslant م$

ر = ٥	ر = ٦	ر = ٧	ر = ٨	ر = ٩
م = ٥	م = ٤	م = ٣	م = ٢	م = ١

معامل $س^{١٠} = - {}^{٩}ق_٥ \times {}^{٥}ق_٥ + {}^{٩}ق_٦ \times {}^{٦}ق_٤ - {}^{٩}ق_٧ \times {}^{٧}ق_٣ + {}^{٩}ق_٨ \times {}^{٨}ق_٢ - {}^{٩}ق_٩ \times {}^{٩}ق_١$

∴ معامل $س^{١٠} = -١٢٦ + ١٢٦٠ - ١٢٦٠ + ٢٥٢ - ٩ = ١١٧$

حاول أن تحل

(٩) أوجد معامل $س^٢$ فى مفكوك $(١ + س + س^٢)^٥$

مثال

(١٠) أ أثبت أن $\frac{{}^{ن}ق_ر}{{}^{ن-١}ق_{ر-١}} = \frac{ن}{ر}$

ب إذا كانت النسبة بين $ح_٦$ من مفكوك $(س + \frac{١}{س})^{١٥}$، $ح_٥$ من مفكوك $(س - \frac{١}{س^٢})^{١٤}$ تساوى $\frac{٨}{٩}$ أوجد قيمة س

الحل

${}^{ن}ق_ر \div {}^{ن-١}ق_{ر-١} = \frac{|ن}{|ر \, |ن-ر} \times \frac{|ر-١ \, |ن-١-ر+١}{|ن-١} = \frac{ن \, |ن-١ \, |ر-١}{ر \, |ر-١ \, |ن-١} = \frac{ن}{ر}$

$= \frac{ح_٦ \text{ من } (س + \frac{١}{س})^{١٥}}{ح_٥ \text{ من } (س + \frac{١}{س^٢})^{١٤}} = \frac{{}^{١٥}ق_٥ \, س^{١٠} (\frac{١}{س})^٥}{{}^{١٤}ق_٤ \, س^{١٠} (\frac{-١}{س^٢})^٤} = \frac{٨}{٩} = \frac{١٥}{٥} \times س^٣$

∴ $س^٣ = \frac{٨}{٢٧}$ ∴ $س = \frac{٢}{٣}$

الحل:

∵ $ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_ر \, س^ر$

∴ معامل $ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_ر$

∵ معامل $ح_٥$ = معامل $ح_٩$

∴ ${}^{ن}ق_٤ = {}^{ن}ق_٨$ ∴ $ن = ٤ + ٨ = ١٢$

∵ $ح_٤ = \frac{٥٥}{٢}$ ∴ ${}^{١٢}ق_٣ \, س^٣ = \frac{٥٥}{٢}$

∴ $\frac{١٢ \times ١١ \times ١٠}{٣ \times ٢ \times ١} \times س^٣ = \frac{٥٥}{٢}$

∴ $س^٣ = \frac{١}{٨}$ ∴ $س = \frac{١}{٢}$

حاول أن تحل (١١)

$٤^ن - ٣ن - ١ = (١ + ٣)^ن - ٣ن - ١$

$= ١ + ٣ن + {}^{ن}ق_٢ \, ٣^٢ + {}^{ن}ق_٣ \, ٣^٣ + ... + ٣^ن - ٣ن - ١$

$= {}^{ن}ق_٢ \times ٣^٢ \times {}^{ن}ق_٣ \times ٣^٣ + ... + (٣)^ن$

$٣^٢ \, [{}^{ن}ق_٢ + {}^{ن}ق_٣ \times ٣ - ...... + ٣^{ن-٢}]$

∴ ٩ عامل من عوامل المقدار $٤^ن - ٣ن - ١$

حاول أن تحل

(١٠) فى مفكوك $(١ + جـ س)^{١٠}$ إذا كان معامل الحد الثالث يساوى ١٨٠، وكان الحد الخامس يساوى ٢١٠ أوجد قيمة كل من جـ ، س حيث جـ $\in$ $ص_{+}$

الحد الأوسط فى مفكوك $(س + أ)^{ن}$ *The middle term*

فى مفكوك $(س + أ)^{ن}$ نجد أن عدد حدود المفكوك = ن + ١

أولًا: إذا كانت ن عددًا زوجيًّا، فإن عدد حدود المفكوك هو عدد فردى، ويوجد للمفكوك حد أوسط وحيد رتبته $\frac{ن + ٢}{٢}$

ثانيًا: إذا كانت ن عددًا فرديًّا، فإن عدد حدود المفكوك هو عدد زوجى، ويوجد للمفكوك حدان أوسطان رتبتاهما $\frac{ن + ١}{٢}$ ، $\frac{ن + ٣}{٢}$

مثال

(١١) أوجد الحد الأوسط فى مفكوك $(٢س + \frac{١}{٢س^{٢}})^{١٢}$

الحل

رتبة الحد الأوسط = $\frac{١٢}{٢} + ١ = ٧$

$ح_{٧} = {}^{١٢}ق_{٦} (٢س)^{٦} (\frac{١}{٢س^{٢}})^{٦} = {}^{١٢}ق_{٦} (٢)^{٦} (\frac{١}{٢})^{٦} س^{٦ - ١٢} = {}^{١٢}ق_{٦} س^{-٦}$

حاول أن تحل

(١١) أوجد الحد الأوسط من مفكوك $(س^{٢} + \frac{١}{س^{٢}})^{١٠}$ ، وإذا كانت قيمة هذا الحد = $\frac{٢٨}{٢٧}$ أوجد قيمة س

مثال

(١٢) أوجد الحدين الأوسطين فى مفكوك $(\frac{س^{٢}}{٣} + \frac{٣}{س})^{١٥}$

الحل

رتبة الحدين الأوسطين تساوى $\frac{١٥ + ١}{٢}$ والذى يليه أى $ع_{٨}$ ، $ع_{٩}$

$ع_{٨} = {}^{١٥}ق_{٧} (\frac{س^{٢}}{٣})^{٨} (\frac{٣}{س})^{٧} = {}^{١٥}ق_{٧} \times ٣^{-٨+٧} \times س^{١٦ - ٧} = {}^{١٥}ق_{٧} \times \frac{١}{٣} س^{٩}$

$ع_{٩} = {}^{١٥}ق_{٨} (\frac{س^{٢}}{٣})^{٧} (\frac{٣}{س})^{٨} = {}^{١٥}ق_{٨} \times ٣^{٨-٧} \times س^{١٤ - ٨} = {}^{١٥}ق_{٨} \times ٣ س^{٦}$

حاول أن تحل

(١٢) إذا كان الحدان الأوسطان من مفكوك $(٣س + ٢ص)^{١٣}$ متساويين أثبت أن $\frac{س}{ص} = \frac{٢}{٣}$

حاول أن تحل (١٢)

$ع_{٣} = {}^{١٠}ق_{٢} جـ^{٢} س^{٢} = ١٨٠ ، ع_{٥} = {}^{١٠}ق_{٤} جـ^{٤} س^{٤} = ٢١٠$

∴ $\frac{ع_{٥}}{ع_{٣}} = \frac{{}^{١٠}ق_{٤}}{{}^{١٠}ق_{٢}} \times \frac{جـ^{٤} س^{٤}}{جـ^{٢} س^{٢}} = \frac{٢١٠}{١٨٠}$

$\frac{١٤}{٣} جـ^{٢} س^{٢} = \frac{٢١٠}{١٨٠}$ ∴ $جـ^{٢} س^{٢} = \frac{١}{٤}$

بوضع س = ١ ∴ $جـ^{٢} = \frac{١}{٤}$ ∴ $جـ = \pm \frac{١}{٢}$

الحد الأوسط فى مفكوك $(س + أ)^{ن}$

¤ استرجع على طلابك أن عدد حدود فى مفكوك

$(س + أ)^{ن} = ن + ١$ حدًا.

¤ ناقش طلابك من خلال حلول الأمثلة السابقة أن (ن + ١) يوجد لها حالتان :

الأولى: ن عدد زوجى

الثانى: ن عدد فردى

وبالتالى اذا كانت ن عدد زوجى فإن ن + ١ يكون فرديًا

∴ المفكوك به حد أوسط واحد ورتبته $\frac{ن}{٢} + ١$

مثال:

اذا كان ن = ١٠ فان عدد الحدود = ١١

∴ الحد الاوسط ترتيبه $\frac{١٠}{٢} + ١$ أى $ح_{٦}$

واذا كان ن = ٦ فان عدد الحدود = ٧

∴ الحد الأوسط ترتيبه $\frac{٦}{٢} + ١$ ∴ $ح_{٤}$

أما اذا كان ن عدد فردى :

∴ ن + ١ هو عدد زوجى

∴ المفكوك له حدان أوسطان هما $\frac{ن+١}{٢}$ ، $\frac{ن+٣}{٢}$

فإذا كان ن = ١١ وكان عدد الحدود = ١٢

∴ الحدان الأوسطان هما رتبتهما:

$\frac{١١+١}{٢}$ ، $\frac{١١+٣}{٢}$ أى $ح_{٦}$ ، $ح_{٧}$

التقييم : الحوار والمناقشة

¤ ناقش مع طلابك ما ورد فى بند حاول أن تحل وتوصل معهم للاجابات الصحيحة

حاول أن تحل (١٣)

الحد الأوسط من مفكوك $(س^{٢} + \frac{١}{س^{٢}})^{١٠}$ هو $ح_{٦}$

$ح_{٦} = {}^{١٠}ق_{٥} (\frac{١}{س^{٢}})^{٥} (س^{٢})^{٥} = \frac{٦٣}{٨} س^{٥}$

∵ $\frac{٦٣}{٨} س^{٥} = \frac{٢٨}{٢٧}$ ∴ $س = \frac{٣}{٢}$

حاول أن تحل (١٤)

الحدان الأوسطان فى مفكوك $(٣س + ٢ص)^{١٣}$ ص $ح_{٧}$ ، $ح_{٨}$

$ع_{٧} = {}^{١٣}ق_{٦} (٢ص)^{٦} \times (٣س)^{٧}$

$ع_{٨} = {}^{١٣}ق_{٧} (٢ص)^{٧} \times (٣س)^{٦}$

∵ $\frac{ع_{٨}}{ع_{٧}} = ١$ ∴ $\frac{{}^{١٣}ق_{٧}}{{}^{١٣}ق_{٦}} \times \frac{(٢ص)^{٧} (٣س)^{٦}}{(٢ص)^{٦} (٣س)^{٧}} = ١$

$\frac{١٣ - ٧ + ١}{٧} \times \frac{٢ص}{٣س} = ١$ ∴ $\frac{س}{س} = \frac{٢}{٣}$

حاول أن تحل (١٥)

رتبة الحد الأوسط = $\frac{١٠}{٢} + ١ = ٦$

ح$_٦$ = ^{١٠}ق$_٥$ $\left(\frac{١}{٢\sqrt{س}}\right)^٥ \left(٢\sqrt{س}\right)^٥$ + ^{١٠}ق$_٥$ $\left(-\frac{١}{٢\sqrt{س}}\right)^٥ \left(٢\sqrt{س}\right)^٥$

= ^{١٠}ق$_٥$ $\left(\frac{١}{٢\sqrt{س}}\right)^٥ \left(٢\sqrt{س}\right)^٥$ [١ - ١] = صفر

الحوار والمناقشة

¤ ناقش مع طلابك تلك التمارين الأثرائية

تمرين اثرائى:

(١) بفرض أن الحدين الأوسطين فى مفكوك $\left(٢س - \frac{١}{٤س^٢}\right)^٩$ هما أ ، ب حيث أ = ب فأثبت أن

أ + ٨ ب س^٣ = صفر

الحل:

عدد الحدود = ١٠ ، الحدان الأوسطان = ح$_٥$ ، ح$_٦$

حيث أ = ح$_٥$ = ^{٩}ق$_٤$ $\left(\frac{-١}{٤س^٢}\right)^٤ (٢س)^٥$

= ^{٩}ق$_٤$ $\frac{-١}{٨س^٣}$

، ب = ح$_٦$

= ^{٩}ق$_٥$ $\left(\frac{-١}{٤س^٢}\right)^٥ (٢س)^٤$

= - ^{٩}ق$_٤$ $\frac{١}{٦٤ س^٦}$

∴ الطرف الايمن = أ + ٨ ب س^٣

= ^{٩}ق$_٤$ × $\frac{١}{٨س^٣}$ - ٨ × ^{٩}ق$_٤$ × $\frac{س^٣}{٦٤س^٦}$

= ^{٩}ق$_٤$ × $\frac{١}{٨س^٣}$ - ^{٩}ق$_٤$ × $\frac{١}{٨س^٣}$

= $\frac{١}{٨س^٣}$ (^{٩}ق$_٤$ - ^{٩}ق$_٤$)

∴ الطرف الايمن = $\frac{١}{٨س^٣}$ × ٠ = ٠ = الطرف الأيسر

تفكير ناقد:

(٢) اذا كان الحدان الأوسطان فى مفكوك (ا س +ب)$^{٢ن+١}$

متساويين حيث ن ∈ ص$^+$ فأثبت أن س = $\frac{ب}{ا}$

الوحدة الأولى: التباديل والتوافيق ونظرية ذات الحدين

مثال

(١٣) أوجد الحد الأوسط من مفكوك (٣ + ٢س)^٨ + (٣ - ٢س)^٨

الحل

رتبة الحد الأوسط = $\frac{٨}{٢}$ + ١ = ٥

ح$_٥$ = ^{٨}ق$_٤$ (٣)^٤ (٢س)^٤ + ^{٨}ق$_٤$(٣)^٤ (-٢س)^٤

= ٢ × ^{٨}ق$_٤$ (٣)^٤ (٢ س)^٤ = ١٨١٤٤٠ س^٤

حاول أن تحل

(١٣) أوجد الحد الأوسط من مفكوك $\left(٢\sqrt{س} + \frac{١}{٢\sqrt{س}}\right)^{١٠} + \left(٢\sqrt{س} - \frac{١}{٢\sqrt{س}}\right)^{١٠}$

تمـاريـن (١ – ٢)

اختر الإجابة الصحيحة:

(١) إذا كان الحدان الأوسطان فى مفكوك (س + ص)^ن هما ٧،٨ فإن ن تساوى:

أ ١٤ ب ١٥ ج ١٦ د ٥٦

(٢) إذا كان ١ + ٥ س + $\frac{٥ × ٤}{٢ × ١}$ س^٢ + $\frac{٥ × ٤ × ٣}{٣ × ٢ × ١}$ س^٣ + ... + س^٥ = (١٠٢٤) فإن س تساوى:

أ ١ ب ٢ ج ١٠ د ٣

(٣) مجموع معاملات حدود مفكوك (س^٢ - $\frac{١}{س}$)^٧ يساوى:

أ ٢^٧ ب ٢^٥ ج ٢^٦ د صفر

(٤) معامل الحد الخامس من مفكوك (١ + ٢س)^{١٠}.

أ ١٦ ^{١٠}ق$_٥$ ب $\frac{١}{١٦}$ ^{١٠}ق$_٥$ ج ١٦ ^{١٠}ق$_٤$ د $\frac{١}{١٦}$ ^{١٠}ق$_٤$

(٥) من مفكوك ذات الحدين إذا كان الحد العام هو ^{١٢}ق$_ر$ س$^{٢٤-٤ر}$ يكون الحد المشتمل على س^{١٢} هو:

أ ح$_٣$ ب ح$_٤$ ج ح$_٥$ د لايوجد

(٦) إذا كان الحدان الأوسطان من مفكوك (أ + ٢ب)$^{٢ن+١}$ متساويين فإن:

أ $\frac{أ}{ب} = \frac{١}{٢}$ ب أ = ٤ب ج أ = ٨ب د أ = ٢ب

(٧) إذا كان الحد الأوسط فى مفكوك $\left(\frac{أ٢}{٣} + \frac{ب}{أ٢}\right)^{٨ن}$ هو الحد التاسع فإن ن تساوى:

أ ١ ب ٢ ج ٣ د ٤

٢٠ الصف الثالث الثانوى - كتاب الطالب

حاول أن تحل (١٦)

الحدان الأوسطان فى مفكوك $\left(س - \frac{١}{س}\right)^{١٥}$ هما ح$_٨$ ، ح$_٩$

ح$_٨$ = أ = ^{١٥}ق$_٧$ $\left(-\frac{١}{س}\right)^٧$ س^٨

ح$_٩$ = ب = ^{١٥}ق$_٨$ $\left(-\frac{١}{س}\right)^٨$ س^٧

∴ أ + ب س^٢ = صفر ∴ ^{١٥}ق$_٧$ س + س^٢ × ^{١٥}ق$_٨$ × $\frac{١}{س}$ =

- ^{١٥}ق$_٧$ س + ^{١٥}ق$_٨$ س = صفر لأن ^{١٥}ق$_٨$ = ^{١٥}ق$_٧$

٨ من مفكوك $(١ + ب\,س)^{٩}$ يكون معامل الحد السادس هو:

أ $^{٩}ق_{٥}$ ب $^{٩}ق_{٦}$ ج $^{٩}ق_{٥}\,ب^{٥}$ د $^{٩}ق_{٦}\,ب^{٦}$

٩ من مفكوك المقدار ذى الحدين لدينا ٧ حدود موجبة، ٦ حدود سالبة فإن المقدار يكون على الصورة:

أ $(أ - ب)^{١٢}$ ب $(أ - ب)^{١٣}$ ج $(أ + ب)^{١٢}$ د $(أ - ب)^{١٣}$

ثانيًا : أجب عما يأتى:

١٠ إذا كان $١ + ٨س + {}^{٨}ق_{٢}\,س^{٢} + ... + س^{٨} = ٢٥٦$ أوجد قيمة س

١١ أوجد لأقرب رقم من ألف مستخدمًا نظرية ذات الحدين قيمة كل من :

أ $(١,٠٠٣)^{٥}$ ب $(٠,٩٩٨)^{٧}$ ج $(١,٠١)^{٦} + (٠٠,٩٩)^{٦}$ د $(١,٠٢)^{٨} - (٠,٩٨)^{٨}$

١٢ أوجد قيمة س التى تحقق $(١ + \sqrt{٣})^{٦} - (١ - \sqrt{٣})^{٦} = ٤٨٠\sqrt{٣}\,س$

١٣ باستخدام المفكوك : $(١ + س)^{١٠} = ١ + {}^{١٠}ق_{١}\,س + {}^{١٠}ق_{٢}\,س^{٢} + ... + س^{١٠}$ أثبت أن:

أ $١ + {}^{١٠}ق_{١} + {}^{١٠}ق_{٢} + ... + {}^{١٠}ق_{١٠} = ٢^{١٠}$ ب $١ - {}^{١٠}ق_{١} + {}^{١٠}ق_{٢} - ...... + {}^{١٠}ق_{١٠} = $ صفر

١٤ اكتب على صورة مفكوك كلًّا من :

أ $(\frac{٢}{س} + \frac{س}{٢})^{٤}$ ب $(س - \frac{١}{س})^{٥}$

ج $(١ + \sqrt{٢})^{٤} + (١ - \sqrt{٢})^{٤}$ د $(\sqrt{٣} + ٢)^{٥} - (\sqrt{٣} - ٢)^{٥}$

١٥ من مفكوك $(١ + س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان $ح_{٣} = ٢٨س^{٢}$ ، $ح_{٥} = ١١٢٠$ أوجد قيمة كل من: ن، س

١٦ من مفكوك $(١ + س)^{ن}$ إذا كان معامل الحد السادس يساوى معامل الحد العاشر أوجد قيمة ن.

١٧ من مفكوك $(أس + ب)^{١٠}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان معامل $ح_{٦} = \frac{٦٣}{٨}$ اثبت ان $٢أب = ١$

١٨ من مفكوك $(٢س^{٢} + \frac{١}{٢س})^{١٢}$ أوجد قيمة الحد الأوسط.

١٩ من مفكوك $(\frac{س^{٢}}{٢} - \frac{٢}{س})^{١١}$ أوجد الحدين الأوسطين.

٢٠ من مفكوك $س^{٤}(س - \frac{١}{س})^{٩}$ حسب قوى س التنازلية، أوجد الحد الرابع من النهاية.

٢١ إذا كان الحد الأوسط من مفكوك $(س^{٢} + \frac{١}{٢س})^{١٠}$ يساوى $\frac{٢٨}{٢٧}$ فأوجد قيمة س.

٢٢ أوجد النسبة بين الحد الأوسط والحد الخامس من مفكوك $(\frac{٢س}{٣} + \frac{٣}{٢س})^{١٠}$ ، ثم أوجد القيمة العددية للنسبة عندما س = ٣

٢٣ إذا كانت النسبة بين الحد الخامس من مفكوك $(س + \frac{١}{س})^{١٥}$ والحد الرابع من مفكوك $(س - \frac{١}{س^{٢}})^{١٤}$ تساوى ‎-١٦ : ١٥ أوجد قيمة س

التقويم :

إجابة بعض تمارين (١-٢)

١ د ٢ د ٣ د ٤ ج ٥ ب

٦ د ٧ ب ٨ ج ٩ أ

١٣ $(١ + \sqrt{٣})^{٦} - (١ - \sqrt{٣})^{٦} = ٤٨٠\sqrt{٣}\,س$

$$٢ح_{٢} + ٢ح_{٤} + ٢ح_{٦} = ٤٨٠\sqrt{٣}\,س$$

$$٢\{{}^{٦}ق_{١}\sqrt{٣} + {}^{٦}ق_{٣}\sqrt{٣}^{\,٣} + {}^{٦}ق_{٥}\sqrt{٣}^{\,٥}\} = ٤٨٠\sqrt{٣}\,س$$

$$\sqrt{٣}\{٦ + ٢٠ \times ٣ + ٦ \times ٩\} = ٤٨٠\sqrt{٣}\,س = ٢$$

٢١ $ح_{٤}$ من النهاية فى $س^{٤}(س - \frac{١}{س})^{٩}$ هو $ح_{٤}$ من البداية فى مفكوك $س^{٤}(-\frac{١}{س} + س)^{٩}$

$$\therefore ح_{٤} = س^{٤} + {}^{٩}ق_{٣}\,س^{٣}(-\frac{١}{س})^{٦} = {}^{٩}ق_{٣}\,س$$

٢٤

$$= \frac{ح_{٥} \text{ من } (س + \frac{١}{س})^{١٥}}{ح_{٤} \text{ من } (س - \frac{١}{س^{٢}})^{١٤}} = \frac{-١٦}{١٥}$$

$$\therefore = \frac{{}^{١٥}ق_{٤} \times (\frac{١}{س})^{٤} س^{١١}}{{}^{١٤}ق_{٣}(\frac{-١}{س^{٢}})^{٣}(س)^{١١}} = \frac{-١٥}{٤}س^{٢} = \frac{-١٦}{١٥}$$

$$\therefore = س = \pm\frac{١٨}{١٥}$$

٢٦ $ح_{٣} = {}^{ن}ق_{٢}(-\frac{١}{٢})^{٢}س^{ن-٢}$ معامل $ح_{٣} = {}^{ن}ق_{٢}(-\frac{١}{٢})^{٢} = ٧$

$$ {}^{ن}ق_{٢} = ٢٨ = {}^{٨}ق_{٢} \quad \therefore ن = ٨$$

$\therefore$ الحد الأوسط $(س - \frac{١}{٢})^{٨}$ هو $ح_{٥}$

$$ح_{٥} = {}^{٨}ق_{٤}(-\frac{١}{٢})^{٤}(س)^{٤} = \frac{٣٥}{٨}س^{٤}$$

١ - ٣ إيجاد الحد المشتمل على $س^{ك}$ من مفكوك ذات الحدين

Finding the term contain x^{R} in the expansion of binomail

خلفيه:

سبق وأن درس الطالب مفهوم مفكوك ذات الحدين وكيفية ايجاد الحد العام لمفكوك ذات الحدين وايجاد الحد الأوسط لهذا المفكوك واستمرارًا لذلك سنتناول فى هذا الدرس ايجاد الحد المشتمل على سك من مفكوك ذات الحدين.

مخرجات التعلم:

- يستخدم الحد العام فى إيجاد الحجد المشتمل على $س^{ك}$.
- يستخدم الحد العام فى إيجاد الحد المشتمل على الحد الخالى من س.
- يوجد معامل الحد المشتمل على سك من المفكوك.
- يوجد معامل أكبر قوة لـ س.

مفردات أساسية:

مفكوك ذات الحدين - نظرية ذات الحدين - الحد العام - الحد المشتمل على $س^{ك}$- الحد الخالى من س - معامل الحد المشتمل على $س^{ك}$.

المواد التعليمية المستخدمة:

السبورة التعليمية - أقلام - آلة حاسبة - الة حاسبة علمية متطورة.

طرق التدريس المقترحة

العرض المباشر - المناقشة - العصف الذهنى - حل المشكلات - الاكتشاف

مكان التدريس

الفصل الدراسى.

مصادر التعلم

- كتاب الطالب من ص٢٤ الى ص٢٩
- الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت)

الوحدة الأولى

١ - ٣ إيجاد الحد المشتمل على $س^{ك}$ من مفكوك ذات الحدين

Finding the term contain x^{R} in the expansion of binomial

سوف تتعلم

- استخدام الحد العام فى إيجاد الحد المشتمل على $س^{ك}$ والحد الخالى من س .
- إيجاد معامل الحد المشتمل على $س^{ك}$ من المفكوك .
- إيجاد معامل أكبر قوة لـ س.

مصطلحات أساسية

- حد عام General term
- حد خالٍ من س Free term of x
- أكبر قوة Heightest power
- معامل حد Coefficient

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية

فكر و ناقش

تعلمنا فى الدرس السابق أن :

$$(س^{٢} - \frac{١}{س^{٢}})^{٢٠} = (س^{٢})^{٢٠} - {}^{٢٠}ق_{١}(س^{٢})^{١٩}(\frac{١}{س^{٢}}) + {}^{٢٠}ق_{٢}(س^{٢})^{١٨}(\frac{١}{٢}س)^{٢} - {}^{٢٠}ق_{٣}(س^{٢})^{١٧}(\frac{١}{س^{٢}})^{٣} + ... + (\frac{-١}{س^{٢}})^{١٠}$$

هل من السهل أن نُوجِد الحد المشتمل على $س^{١٦}$ أو $س^{٢٤}$ أو الحد الخالى من س أو بدون الاسترسال فى كتابة حدود المفكوك؟

نجد أن طريقة البحث بإيجاد المفكوك تكون شاقة؛ ولهذا لإيجاد الحد المشتمل على $س^{ك}$ من المفكوك نتبع الآتى :

١- نفترض أن هذا الحد هو الحد العام $ع_{ر+١}$ ونوجد هذا الحد بدلالة ر.

٢- نوجد مجموع قوى س فى الحد العام بدلالة ر ونضع هذا المجموع مساويًا للقوة المطلوبة ك، ومنها نوجد ر التى تحقق احتواء هذا الحد على القوة المطلوبة ك ولدينا:

أ) ر ∈ ط يكون ر + ١ هو الحد المطلوب.

ب) ر ∉ ط لا يوجد حد يحتوى على القوة المطلوبة من المفكوك.

فى حالة البحث عن الحد الخالى من س نضع مجموع قوى س من الحد العام = صفر

مثال

(١) من مفكوك $(\frac{٣س}{٢} + \frac{٢}{٣س})^{١١}$ أوجد معامل س فى هذا المفكوك .

الحل

$$ع_{ر+١} = {}^{١١}ق_{ر}(\frac{٣س}{٢})^{١١-ر}(\frac{٢}{٣س})^{ر}$$

وبمقارنة القوى $س^{١١-ر-ر} = س^{١}$

$١١ - ٢ر = ١$ ر = ٥

الحد المطلوب هو الحد السادس.   معامل $ع_{٦} = {}^{١١}ق_{٥}(\frac{٣}{٢})^{٦}(\frac{٢}{٣})^{٥} = ٦٩٣$

٢٢ الصف الثالث الثانوى - كتاب الطالب

التهيئة :

- استرجع مع طلابك ما ورد فى الدرسين السابقين بمراجعة لمفكوك ذات الحدين وكيفية ايجاد الحد العام لمفكوك ذات الحدين.

اجراءات الدرس:

- ناقش طلابك فى بند «فكر وناقش» من خلال استعراض الأسئلة التالية:

هل نستطيع أن نوجد الحد المشتمل على س١٦ أو الحد الخالى من س بدون استكمال المفكوك

- وضح لطلابك أنه توجد طريقة أسهل للحصول على المطلوب كالتالى:

(١) نفترض أن الحد المشتمل على ذلك هو الحد العام $ع_{ر+١}$

(٢) نوجد ح فى أبسط صورة له.

(٣) نساوى أس س الناتج فى $ع_{ر+١}$ بالأس المطلوب ك. فنحصل على قيمة ر ويكون الحد المشتمل على $س^{ك}$ هو $ع_{ر+١}$

إيجاد الحد المشتمل على س ك من مفكوك ذات الحدين | ١ - ٣

حاول أن تحل

(١) أوجد معامل $س^{٨}$ فى مفكوك $(\frac{٢س}{٣} - \frac{٣}{س})^{١٢}$

مثال

(٢) من مفكوك $(٢س - \frac{١}{٢س^{٢}})^{٩}$ أوجد :

أ معامل $س^{٣}$ ب الحد الخالى من س

جـ أثبت أن المفكوك لا يحتوى على حد يشتمل على $س^{٢}$

الحل

$ع_{ر+١} = {}^{٩}ق_{ر} (٢س)^{٩-ر} (\frac{-١}{٢س^{٢}})^{ر}$

وبمقارنة الأسس

أ لإيجاد معامل $س^{٣}$

$س^{٩-ر-٢ر} = س^{٣}$ $٩ - ٣ر = ٣$ $ر = ٢$

الحد الثالث يحتوى على $س^{٣}$

$ع_{٣} = {}^{٩}ق_{٢} (٢س)^{٧} (\frac{-١}{٢س^{٢}})^{٢} = {}^{٩}ق_{٢} (٢)^{٧} (\frac{١}{٤}) س^{٧-٤}$

معامل $ع_{٣} = {}^{٩}ق_{٢} \times ٢^{٥} = ٣٦ \times ٣٢$

ب لإيجاد الحد الخالى من س $٩ - ٣ر = صفر$ $ر = ٣$

الحد المطلوب هو $ع_{٤} = {}^{٩}ق_{٣} (٢)^{٦} (\frac{-١}{٢})^{٣} = - {}^{٩}ق_{٣} \times ٢^{٣}$

جـ بوضع $٩ - ٣ر = ٢$ $\therefore ٧ = ٣ر$ $\therefore ر = \frac{٧}{٣} \notin ط$

$\therefore$ هذا المفكوك لا يشتمل على $س^{٢}$

حاول أن تحل

(٢) أ أوجد الحد الخالى من س فى مفكوك $(٢س^{٢} - \frac{١}{س})^{١٢}$

ب أوجد معامل $س^{-١٠}$ فى مفكوك $(\frac{س^{٢}}{٣} - \frac{٢}{س^{٢}})^{١٥}$

(٣) من مفكوك $(أس + \frac{١}{ب س})^{١٠}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان الحد الخالى من س يساوى معامل الحد السابع، أثبت أن $١٦ أ ب = ٥$

مثال

(٣) إذا كان ن عددًا صحيحًا موجبًا أثبت أنه لا يوجد حدٌّ خالٍ من س من مفكوك $(س^{٥} + \frac{١}{س^{٢}})^{ن}$ إلا عندما ن مضاعف للعدد ٧ ثم أوجد هذا الحد فى حالة ن = ٧

كتاب الجبر والهندسة الفراغية - الجبر   ٢٣

(٤) نعوض بقيمة ر التى حصلنا عليها فى $ع_{ر+١}$ لنحصل على الحد المشتمل على $س^{ك}$

ملحوظة:

(١) اذا كانت قيمة ر التى حصلنا عليها من الخطوة (٣) كسرية أو سالبه يبين لنا أن $س^{ك}$ لا تظهر فى المفكوك.

(٢) اذا كان المطلوب ايجاد الحد الخالى من س فنعتبر أن المطلوب ايجاد الحد المشتمل على $س^{٠}$.

أى نساوى أس س الناتج فى $ع_{ر+١}$ بالصفر لنحصل على قيمة ر.

التقييم : الحوار والمناقشة

¤ ناقش مع طلابك بند حاول أن تحل وتوصل معهم الى الاجابات الصحيحة.

(١) $ع_{ر+١} = {}^{١٢}ق_{ر} (-\frac{٣س}{٢})^{ر} (\frac{٢س}{٣})^{١٢-ر}$

$\therefore س^{١٢-ر-ر} = س^{٨}$ $\therefore ر = ٢$

معامل $س^{٨}$ = معامل $ع_{٣} = {}^{١٢}ق_{٢} (-٣)^{٢} (\frac{٢}{٣})^{١٠}$

(٢) ب $ع_{ر+١} = {}^{١٢}ق_{ر} (-\frac{١}{س})^{ر} (٢س^{٢})^{١٢-ر}$

$\therefore س^{٢٤-٣ر} = س^{٠}$ $\therefore ر = ٨$

$\therefore$ الحد الخالى من س هو $ع_{٩} = {}^{١٢}ق_{٨} (-١)^{٨} (٢)^{٤} = {}^{١٢}ق_{٨} \times ٢^{٤}$

ب حاول مع نفسك

(٣) $ع_{ر+١} = {}^{١٠}ق_{ر} (\frac{١}{ب س})^{ر} \times (أس)^{١٠-ر}$

$= {}^{١٠}ق_{ر} أ^{١٠-ر} ب^{-ر} س^{١٠-٢ر}$

لايجاد الحد الخالى نضع $١٠ - ٢ر = صفر$ $\therefore ر = ٥$

$\therefore ع_{٦}$ = معامل $ع_{٧}$ $\therefore {}^{١٠}ق_{٥} أ^{٥} ب^{-٥} = {}^{١٠}ق_{٦} ب^{-٦} أ^{٤}$

$٢٥٢ أ ب = ٢١٠^{٧}$ $١٦ أ ب = ٥$

(٤) $ع_{ر+١} = {}^{٦}ق_{ر} (\frac{-١}{س})^{ر} (س^{ك})^{٦-ر}$

$= {}^{٦}ق_{ر} (-١)^{ر} س^{٦ك - كر - ر}$

لايجاد الحد الخالى من س نضع

$٦ك - كر - ر = صفر$

$ك (٦-س) = ر$ $ك = \frac{ر}{٦-ر}$

$ر \in \{٣، ٤، ٥\}$ عندما $ر = ٣$ $ك = \frac{١}{٢}$

أصغر قيمة للحد الخالى عند $(س = ٣) = {}^{٦}ق_{٣} (-١) س^{٦-٣-٣} = {}^{٦}ق_{٣}$

اجابة بعض تمارين (١-٣)

(١) ج (٢) ج (٣) د (٤) ج (٥) ج

(٦) ج (٧) ب (٨) ب (٩) ج (١٠) ج

(١٢) معامل $س^{١٢}$ فى مفكوك $س^{٢} \left(\frac{س^{٢}}{٢} + \frac{٢}{س^{٣}} \right)^{١٥}$

$ع_{ر+١} = س^{٢} \times {}^{١٥}ق_{ر} \left(\frac{٢}{س^{٣}} \right)^{ر} \left(\frac{س^{٢}}{٢} \right)^{١٥-ر}$

∴ $س^{١٢} = س^{٣٢-٥ر}$ ∴ $ر = ٤$

معامل $س^{١٢}$ = معامل $ع_{٥}$ = ${}^{١٥}ق_{٤} \times ٢^{٤} \times ٢^{-١١} = {}^{١٥}ق_{٤}\, ٢^{-٧}$

(١٣) $ع_{٦}$ خالى من س

∴ $ع_{٦} = س^{٢} \times {}^{ن}ق_{٥} \left(\frac{-١}{س^{٣}} \right)^{٥} (٢س)^{ن-٥}$

∴ $ن - ٥ - ١٥ = ٠$ ∴ $ن = ٢٠$

$ع_{ر+١} = {}^{٢٠}ق_{ر} \left(\frac{-١}{س} \right)^{ر} \times (٢س)^{٢٠-ر}$

∴ $س^{٢٠-٤ر} = س^{-٦}$

∴ $ر = \frac{٢٦}{٤} \notin ص^{+}$ ∴ لا يوجد حد يشتمل على $\frac{-١}{س^{٦}}$

(١٣) ${}^{ن}ق_{ر} : {}^{ن-١}ق_{ر-١} = \frac{ن!}{ر! \times (ن-ر)!} \times \frac{(ر-١)! \times (ن-ر)!}{(ن-١)!}$

$= \frac{ن \,(ن-١)!}{ر \times (ر-١)!} \times \frac{(ر-١)!}{(ن-١)!} = \frac{ن}{ر}$

$\frac{\text{معامل } ع_{١١} \ (١ + س^{٢})^{ن}}{ع_{١٠} \ (١ - ص)^{ن-١}} =$

$\frac{{}^{ن}ق_{١٠}}{{}^{ن-١}ق_{٩} \times -١} = \frac{٣}{٢}$ $ن = ١٥$

(١٨) $ع_{ر+١} = {}^{٢ن}ق_{ر} \left(\frac{١}{س} \right)^{ر} \times (س)^{٢ن-ر}$

∴ $٢ن - ٢ر = $ صفر ∴ $ن = ر$

∴ الحد الخالى من س هو $ح_{ر+١} = ح_{ن+١}$

رتبة الحد الأوسط = $\frac{٢ن}{٢} + ١ = ن + ١$

أى أن الحد الخالى من س هو الحد الأوسط

∴ $ع_{٩} = {}^{١٦}ق_{٨}$

(١٩) $ع_{ر+١} = {}^{٦}ق_{ر} \left(\frac{١}{س} \right)^{ر} \times (ك\, س)^{٦-ر}$

∴ ${}^{٦}ق_{ر}\, س^{٦ك - ك ر - ر}$ ∴ $ك(٦-ر) - ر = $ صفر

الوحدة الأولى: التباديل والتوافيق ونظرية ذات الحدين

الحل

$ع_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر} (س^{٥})^{ن-ر} \left(\frac{١}{س^{٢}} \right)^{ر}$

$س^{٥ن-٥ر-٢ر} = س^{\text{صفر}}$ $٥ن - ٧ر = ٢$ صفر $ر = \frac{٥ن}{٧}$

$\frac{٥ن}{٧} \in ص^{+}$ عندما ن مضاعف للعدد ٧ عندما ن = ٧

$ر = ٥$ الحد المطلوب هو $ع_{٦}$

$ع_{٦} = {}^{٧}ق_{٥} (س^{٥})^{٢} \left(\frac{١}{س^{٢}} \right)^{٥} = {}^{٧}ق_{٥} = ٢١$

حاول أن تحل

(٤) من مفكوك $(س^{٢} + \frac{١}{س})^{٣ن}$ أوجد :

أ معامل الحد الذى يحتوى على $س^{٣ن}$

ب إذا كانت ن = ٦، أوجد النسبة بين معامل هذا الحد (الذى يشتمل على $س^{٣ن}$) ومعامل الحد الأوسط

مثال

(٤) من مفكوك $(٢ + \frac{س}{٣})^{٩}$ أوجد : أولًا قيمة س التى تجعل الحدين الأوسطين متساويين.

الحل

رتبة الحدين الأوسطين $\frac{٩ + ١}{٢}$ والذى يليه أى ،

$ع_{٨} = ع_{٦}$ $(٢)^{٥} \left(\frac{س}{٣} \right)^{٤} = {}^{٩}ق_{٥} (٢)^{٤} \left(\frac{س}{٣} \right)^{٥}$

$٢ = \frac{س}{٣}$ ∴ س = ٦

تمارين الدرس (١-٣)

اختر الإجابة الصحيحة:

(١) الحد المشتمل على $س^{٤}$ من مفكوك $(١ + ٢س)^{١٠}$ يساوى:

أ ${}^{١٥}ق_{٤}$ ب $\frac{١}{١٦}\, {}^{١٠}ق_{٤}$ ج $١٦\, {}^{١٠}ق_{٤}$ د $٣٢ \times {}^{١٠}ق_{٥}$

(٢) من مفكوك $(س + \frac{١}{س})^{١٠}$ يكون الحد الخالى من س هو:

أ $ع_{٤}$ ب $ع_{٥}$ ج $ع_{٦}$ د لايوجد حد خال من س

(٣) من مفكوك $س^{٣} (١ + س)^{٧}$ يكون معامل الحد المشتمل على $س^{٤}$ هو:

أ ${}^{٧}ق_{٤}$ ب ${}^{٧}ق_{٣}$ ج ${}^{٧}ق_{١}$ د ٢١

(٤) من مفكوك $(س^{٢} + \frac{٢}{س})^{٦}$ يكون الحد الخالى من س هو الحد

أ الثالث. ب الرابع. ج الخامس. د لا يوجد حد خال من س

(٥) من مفكوك $(أس^{٢} + \frac{١}{أس})^{١١}$ إذا كان معاملا $س^{٤}$، $س^{٧}$ متساويين فإن أ =

أ ١ ب -١ ج ±١ د ±٢

(٦) إذا كان الحد الخال من س من مفكوك $(س + \frac{١}{س})^{ن}$ هو $ع_{٧}$ فإن ن =

أ ٦ ب ١٠ ج ١٢ د ٨

(٧) من مفكوك $(س^{٢} + \frac{١}{أس})^{٨}$ إذا كان معامل الحد الأوسط يساوى معامل $س^{-١}$ فإن أ =

أ $\frac{٤}{٥}$ ب $\frac{-٤}{٥}$ ج $\pm\frac{٤}{٥}$ د $\pm\frac{٥}{٤}$

(٨) من مفكوك $(أس + \frac{١}{ب س})^{١٠}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان الحد الخالي من س يساوى معامل الحد السابع فإن:

أ $أب = \frac{٦}{٥}$ ب $أب = \frac{٥}{٦}$ ج $أب = \frac{٣٦}{٢٥}$ د $أب = \frac{٢٥}{٣٦}$

(٩) الحد الخالى من س من مفكوك $(٢س + \frac{١}{٢س})^{٨}$

أ ٣٥ ب ١٤٠ ج ٧٠ د ٥٦

(١٠) من مفكوك $(١ + أس)^{٧}$ إذا كان معامل $ع_{٥} = ٥٦٠$ فإن أ =

أ ٢ ب ٤ ج ±٢ د ±٤

(١١) من مفكوك $(٤س^{٢} + \frac{١}{٢س})^{١٢}$ أوجد قيمة الحد الخالى من س

(١٢) أوجد معامل $س^{١٢}$ من مفكوك $س^{٢} (\frac{س^{٢}}{٢} + \frac{٢}{س^{٣}})^{١٥}$

(١٣) إذا كان الحد يشتمل السادس من مفكوك $(٢س - \frac{١}{س^{٣}})^{ن}$ خاليًا من س، أوجد قيمة ن، ثم ابحث: هل هذا المفكوك يشتمل على حد على $س^{-٦}$ أم لا؟

(١٤) من مفكوك $(٢س - \frac{١}{س^{٢}})^{٩}$ أوجد :

أولًا: معامل $س^{٣}$ ثانيًا: الحد الخالى من س

ثالثًا: أثبت أن هذا المفكوك لا يحتوى على حد يشتمل على $س^{٢}$

(١٥) أثبت أن ${}^{ن}ق_{ر} : {}^{ن-١}ق_{ر-١} = \frac{ن}{ر}$ وإذا كانت النسبة بين معامل $ع_{١١}$ من مفكوك $(١ + س^{٢})^{ن}$ ومعامل $ع_{١٠}$ من مفكوك $(١ - ص)^{ن-١}$ تساوى ٢ : ٣ أوجد قيمة ن.

(١٦) أوجد معامل $(\frac{س}{ص})^{٤}$ من مفكوك $(\frac{٢س}{ص} + \frac{ص}{٢س})^{١٠}$

(١٧) أوجد معامل $س^{ن}$ من مفكوك $(١ + س)^{٢ن}$ ، ثم أثبت أنه يساوى ضعف معامل $س^{ن}$ من مفكوك $(١ + س)^{٢ن-١}$

(١٨) من مفكوك $(س + \frac{١}{س})^{٢ن}$ أثبت أن الحد الخالى من س هو الحد الأوسط، ثم أوجد قيمة هذا الحد عندما ن = ٨

(١٩) من مفكوك $(\text{س}^{\text{ك}} + \frac{1}{\text{س}})^{6}$ حيث ك عدد صحيح موجب .أوجد :

أولًا: قيمة ك التى تجعل للمفكوك حدًّا خاليًا من س

ثانيًا: النسبة بين الحد الخالى من س ومعامل الحد الأوسط لأكبر قيمة من قيم ك التى حصلت عليها من أولًا.

(٢٠) من مفكوك $(\text{س}^{2} + \frac{1}{\text{أس}})^{12}$ إذا كانت النسبة بين الحد الخالى من س ومعامل س^{3} من هذا المفكوك تساوى ٥ : ١٦ ، أوجد قيمة أ ثم أوجد قيمة الحد الأوسط عندما س = ٢.

(٢١) من مفكوك $(2\text{س}^{2} + \frac{\text{أ}}{\text{س}^{3}})^{10}$ إذا كان معامل س٥ يساوى معامل س١٥ أوجد قيمة أ.

(٢٢) من مفكوك $(\text{س}^{2} + \frac{1}{8\text{س}})^{13}$ حسب قوى س التنازلية :

أولًا: أثبت أنه لا يوجد حد خالٍ من س　　**ثانيًا:** إذا كان $\text{ع}_{4} = \text{ع}_{11}$ أوجد قيمة س

(٢٣) من مفكوك $(\text{س} + \frac{1}{\text{س}^{2}})^{9}$ أوجد:

اولًا: رتبة وقيمة الحد الخالى من س

ثانيا: قيمة س التى تجعل مجموع الحدين الأوسطين فى المفكوك يساوى صفر.

(٢٤) أوجد قيمة الحد الخالى من س من مفكوك $(9\text{س}^{2} + \frac{1}{3\text{س}})^{9}$، ثم أوجد قيمة س التى تجعل الحدين الأوسطين متساويين.

(٢٥) من مفكوك $(\text{س}^{2} + \frac{1}{\text{س}})^{3\text{ن}}$

أولًا: اثبت أن هذا المفكوك لا يشتمل على حد خالٍ من س إلا إذا كان ن عددًا زوجيًّا.

ثانيًا: أوجد معامل الحد الذى يشتمل على $\text{س}^{3\text{ن}}$

ثالثًا: إذا كان ن = ٦ ، أوجد النسبة بين الحد الذى يشتمل على $\text{س}^{3\text{ن}}$ والحد الأوسط من هذا المفكوك.

$\text{ك} = \frac{\text{ر}}{6-\text{ر}}$ ، $\text{ر} \in \{3، 4، 5\}$

أكبر قيمة ك عندما ر = ٥　　∴ ك = ٥

$\text{ح}_{6} = {}^{6}\text{ق}_{5}$　　الحد الأوسط $= \text{ح}_{4}$

$$\therefore \frac{\text{ع}_{6}}{\text{معامل ع}_{4}} = \frac{{}^{6}\text{ق}_{5}}{{}^{6}\text{ق}_{3}} = \frac{6}{20}$$

(١٩) $\text{ع}_{\text{ر}+1} = {}^{10}\text{ق}_{\text{ر}} \left(\frac{\text{أ}}{\text{س}^{3}}\right)^{\text{ر}} \times (2\text{س}^{2})^{10-\text{ر}}$

${}^{10}\text{ق}_{\text{ر}}\ \text{أ}^{\text{ر}} \times 2^{10-\text{س}}$　　$\text{س}^{20-2\text{ر}-3\text{ر}}$

$\therefore \text{س}^{20-5\text{ر}} = \text{س}^{5}$　　∴ ر = ٣

$\therefore \text{س}^{20-5\text{ر}} = \text{س}^{15}$　　∴ ر = ١

معامل ع_{4} = معامل ع_{2}

$\therefore {}^{10}\text{ق}_{3} \times \text{أ}^{3} \times 2^{7} = {}^{10}\text{ق}_{1}\ \text{أ} \times 2^{9}$

$\text{أ}^{2} = \frac{10 \times 2^{9}}{120 \times 2^{7}} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$　　$\text{أ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(٢٤) $\text{ع}_{\text{ر}+1} = {}^{9}\text{ق}_{\text{ر}} \left(\frac{1}{3\text{س}}\right)^{\text{ر}} (9\text{س}^{2})^{9-\text{ر}}$

${}^{9}\text{ق}_{\text{ر}} \times 3^{-\text{ر}} \times 9^{9-\text{ر}}$　　$\text{س}^{18-3\text{ر}}$

$\text{س}^{18-3\text{ر}} = \text{س}^{\text{ن}}$　　∴ ر = ٦

الحدين الأوسطين هى ع_{5} ، ع_{6}

$\therefore {}^{9}\text{ق}_{4} \left(\frac{1}{3\text{س}}\right)^{4} (9\text{س}^{2})^{5} = {}^{9}\text{ق}_{5} \left(\frac{1}{3\text{س}}\right)^{5} (9\text{س}^{2})^{4}$

$3\text{س} \times 9\text{س}^{2} = 1$　　$\therefore \text{س} = \frac{1}{3}$

تمرين اضافى (اثرائى):

فى مفكوك $(\text{س}^{\text{ك}} + \frac{1}{\text{س}})^{12}$ حيث $\text{ك} \in \text{ص}^{+}$ أوجد:

قيم ك التى تجعل للمفكوك حدًا خاليًا من س.

الحل:

نفرض أن الحد الخالى من س هو $\text{ع}_{\text{ر}+1}$

$\therefore \text{ع}_{\text{ر}+1} = {}^{12}\text{ق}_{\text{ر}} \left(\frac{1}{\text{س}}\right)^{\text{ر}} (\text{س}^{\text{ك}})^{12-\text{ر}}$

$= {}^{12}\text{ق}_{\text{ر}} \left(\frac{1}{\text{س}^{\text{ر}}}\right) \times \text{س}^{12\text{ك}-\text{ك}\text{ر}}$

$\therefore \text{ع}_{\text{ر}+1} = {}^{12}\text{ق}_{\text{ر}} \times \text{س}^{12\text{ك}-\text{ك}\text{ر}-\text{ر}}$　　وليكون خالى من س

$\therefore 12\text{ك} - \text{ك}\text{ر} - \text{ر} = 0$　　$\therefore \text{ك} = \frac{\text{ر}}{12-\text{ر}}$

∴ ر = ٦ فإن ك = ١ ويكون ع_{7} خال من س

∴ ر = ٨ فإن ك = ٢ ويكون ع_{9} خال من س

وكذلك ..... عند ر = ٩ ، ر = ١٠، ر = ١١

١ - ٤ النسبة بين حدين متتالين من مفكوك ذات الحدين

خلفية

سبق وأن درس الطالب مفكوك ذات الحدين وتعرف على كيفية ايجاد الحد الأوسط والحد العام وتناول أيضًا الحد الخالى من س وكيفية ايجاد الحد المشتمل على $\text{س}^{\text{ك}}$ فى مفكوك ذات الحدين. وسوف نستكمل فى هذا الدرس النسبة بين حدين متتالين من مفكوك ذات الحدين وكذلك النسبة بين معامل حدين متتاليين

مخرجات التعلم:

- يوجد النسبة بين حدين متتالين فى مفكوك ذات الحدين.
- يوجد النسبة بين معامل حدين متتالين فى مفكوك ذات الحدين.

مفردات أساسية:

النسبة - نظرية ذات الحدين - الحد العام - حدين متتالين - مفكوك ذات الحدين

طرق التدريس المستخدمة

العرض المباشر - العصف الذهنى - الحوار والمناقشة ، حل المشكلات - الاكتشاف.

المواد التعليمية المستخدمة:

آلة حاسبة متطورة

مكان التدريس

الفصل الدراسى

مصادر التعلم:

كتاب الطالب من ص٣٠ الى ٣٤

- الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت)

الوحدة الأولى

١ - ٤

النسبة بين حدين متتاليين من مفكوك ذات الحدين

سوف تتعلم

- إيجاد النسبة بين حدين متتالين.
- إيجاد النسبة بين معاملى حدين متتالين.

مصطلحات أساسية

- حدان متتالين Consecutive terms

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية

من مفكوك $(\text{س}+\text{أ})^{\text{ن}}$ وبفرض أن الحدين المتتالين هما $\text{ع}_{\text{ر}+١}$ ، $\text{ع}_{\text{ر}}$

$$\frac{\text{ع}_{\text{ر}+١}}{\text{ع}_{\text{ر}}} = \frac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}\,(\text{س})^{\text{ن}-\text{ر}}(\text{أ})^{\text{ر}}}{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-١}\,(\text{س})^{\text{ن}-\text{ر}+١}(\text{أ})^{\text{ر}-١}}$$

$$= \frac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}}{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-١}} \times \frac{\text{أ}}{\text{س}}$$

$$\boxed{\frac{\text{ع}_{\text{ر}+١}}{\text{ع}_{\text{ر}}} = \frac{\text{ن}-\text{ر}+١}{\text{ر}} \times \frac{\text{أ}}{\text{س}}}$$

ويكون : $\frac{\text{معامل ع}_{\text{ر}+١}}{\text{معامل ع}_{\text{ر}}} = \frac{\text{ن}-\text{ر}+١}{\text{ر}} \times \frac{\text{معامل أ}}{\text{معامل س}}$

مثال

١) من مفكوك $(٣+٢\text{ص})^{١٢}$ أوجد كلًّا من :

أ) $\frac{\text{ع}_٣}{\text{ع}_٢}$ ب) $\frac{\text{معامل ع}_٧}{\text{معامل ع}_٨}$ ج) $\frac{\text{ع}_٦}{\text{ع}_٤}$ د) $\frac{\text{معامل ع}_٨}{\text{معامل ع}_٦}$

الحل

أ) $\frac{\text{ع}_٣}{\text{ع}_٢} = \frac{١٢-٢+١}{٢} \times \left(\frac{٢\text{ص}}{\text{س}}\right)$

$= \frac{١١}{٢} \times \frac{٢\text{ص}}{\text{س}} = \frac{١١\text{ص}}{\text{س}}$

ب) $\frac{\text{معامل ع}_٧}{\text{معامل ع}_٨} = \frac{٧}{١٢-٧+١} \times \frac{١}{٢} = \frac{٧}{١٢}$

ج) $\frac{\text{ع}_٦}{\text{ع}_٤} = \frac{\text{ع}_٦}{\text{ع}_٥} \times \frac{\text{ع}_٥}{\text{ع}_٤}$

$= \frac{١٢-٥+١}{٥} \times \left(\frac{٢\text{ص}}{\text{س}}\right) \times \frac{١٢-٤+١}{٤}\left(\frac{٢\text{ص}}{\text{س}}\right)$

$= \frac{٨}{٥} \times \frac{٢\text{ص}}{\text{س}} \times \frac{٩}{٤} \times \frac{٢\text{ص}}{\text{س}} = \frac{٧٢\,\text{ص}^٢}{٥\,\text{س}^٢}$

د) $\frac{\text{معامل ع}_٨}{\text{معامل ع}_٦} = \frac{\text{معامل ع}_٨}{\text{معامل ع}_٧} \times \frac{\text{معامل ع}_٧}{\text{معامل ع}_٦}$

$= \frac{١٢-٧+١}{٧} \times \frac{٢}{١} \times \frac{١٢-٦+١}{٦} \times \frac{٢}{١}$

$= \frac{٦}{٧} \times \frac{٢}{١} \times \frac{٧}{٦} \times \frac{٢}{١} = ٤$

كتاب الجبر والهندسة الفراغية - الجبر ٢٧

التهيئة:

- راجع مع طلابك القوانين الخاصة بالتباديل والتوافيق.
- ثم استرجع ايجاد الحد العام للمفكوك ذات الحدين وكيفية ايجاد الحد الاوسط

إجراءات الدرس:

- ناقش مع طلابك اثبات أن

$$\frac{\text{ع}_{\text{ر}+١}}{\text{ع}_{\text{ر}}} = \frac{\text{ن}-\text{ر}+١}{\text{ر}} \times \frac{\text{أ}}{\text{س}}$$

ويكون $\frac{\text{معامل ع}_{\text{ر}+١}}{\text{معامل ع}_{\text{ر}}} = \frac{\text{ن}-\text{ر}+١}{\text{ر}} \times \frac{\text{معامل أ}}{\text{معامل س}}$

- ذكر طلابك بالآتى

$$\frac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}}{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-١}} = \frac{\text{ن}-\text{ر}+١}{\text{ر}}$$

بينما $\frac{\text{ع}_{\text{ر}+١}}{\text{ع}_{\text{ر}}} = \frac{\text{ن}-\text{ر}+١}{\text{ر}} \times \frac{\text{الحد الثانى}}{\text{الحد الأول}}$

حيث $\frac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{٨}}{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{٧}}$ تكون $\text{ر} = ٨$

بينما $\frac{\text{ع}_٨}{\text{ع}_٧}$ فإن $\text{ر} = ٧$

الوحدة الأولى: التباديل والتوافيق ونظرية ذات الحدين

حاول أن تحل

(١) من مفكوك $(\text{س}^{٢} + \frac{٢}{\text{س}})^{٨}$

أولاً: أوجد النسبة بين الحدين الخامس والسادس، وإذا كانت هذه النسبة تساوى ٨ : ٢٥ أوجد قيمة س

ثانيًا: أثبت أن هذا المفكوك لا يحتوى على حد خالٍ من س

مثال

(٢) من مفكوك $(\text{س} + \text{ص})^{٨}$ إذا كان $٢\,\text{ع}_{٥} = \text{ع}_{٤} + \text{ع}_{٦}$ أوجد $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ عدديًا.

الحل

$\text{ع}_{٤} + \text{ع}_{٦} = ٢\,\text{ع}_{٥}$ بالقسمة على $\text{ع}_{٥}$

$$\frac{\text{ع}_{٤}}{\text{ع}_{٥}} + \frac{\text{ع}_{٦}}{\text{ع}_{٥}} = ٢$$

$$\frac{٤}{٨-٤+١}\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right) + \frac{٨-٥+١}{٥}\left(\frac{\text{ص}}{\text{س}}\right) = ٢$$

$$\frac{٤\text{س}}{٥\text{ص}} + \frac{٤\text{ص}}{٥\text{س}} = \frac{٢}{١}$$ بالضرب × ٥ س ص

$$٤\text{س}^{٢} + ٤\text{ص}^{٢} = ١٠\,\text{س ص}$$

$$٤\text{س}^{٢} - ١٠\,\text{س ص} + ٤\text{ص}^{٢} = \text{صفر} \div ٢$$

$$٢\text{س}^{٢} - ٥\,\text{س ص} + ٢\,\text{ص}^{٢} = ٠$$

$$(٢\,\text{س} - \text{ص})(\text{س} - ٢\,\text{ص}) = ٠$$

$٢\,\text{س} = \text{ص}$ $\text{س} = ٢\,\text{ص}$

$\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{١}{٢}$ أو $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{٢}{١}$

حاول أن تحل

(٢) من مفكوك $(\sqrt{\text{س}} + \frac{١}{\text{س}})^{٨}$ إذا كان $\text{ع}_{٤}، \text{ع}_{٥}، ٢٥\,\text{ع}_{٧}، \text{ع}_{٦}$ متناسبة أوجد قيمة س

مثال

(٣) إذا كانت معاملات ثلاثة حدود متتالية من مفكوك $(١ + \text{س})^{\text{ن}}$ هى ٣٥ ، ٢١، ٧ حسب قوى س التصاعدية، أوجد قيمة كل من ن و رتب الحدود الثلاثة.

الحل

بفرض $\text{ع}_{\text{ر}}، \text{ع}_{\text{ر}+١}، \text{ع}_{\text{ر}+٢}$

$$\frac{\text{معامل ع}_{\text{ر}+١}}{\text{معامل ع}_{\text{ر}}} = \frac{\text{ن} - \text{ر} + ١}{\text{ر}} = \frac{٢١}{٣٥} \qquad \frac{\text{ن} - \text{ر} + ١}{\text{ر}} = \frac{٣}{٥}$$

$$٥\,\text{ن} - ٥\,\text{ر} + ٥ = ٣\,\text{ر} \qquad \boxed{٥\,\text{ن} - ٨\,\text{ر} = -٥}$$

$$\frac{\text{معامل ع}_{\text{ر}+٢}}{\text{معامل ع}_{\text{ر}+١}} = \frac{\text{ن} - (\text{ر} + ١) + ١}{\text{ر} + ١} = \frac{٧}{٢١} \qquad \frac{\text{ن} - \text{ر}}{\text{ر} + ١} = \frac{١}{٣}$$

$$٣\text{ن} - ٣\,\text{ر} = \text{ر} + ١ \qquad \boxed{٣\text{ن} - ٤\,\text{ر} = ١}$$

وبحل المعادلتين: $٣\,\text{ن} - ٤\text{ر} = ١$ ، $٥\,\text{ن} - ٨\,\text{ر} = -٥$ $\therefore \text{ن} = ٧، \text{ر} = ٥$

حاول أن تحل

(٣) إذا كانت الحدود: الثالث ، الرابع ، الخامس من مفكوك $(\text{س} + \text{ص})^{\text{ن}}$ هى على الترتيب ١١٢، ٤٤٨ ، ١١٢٠ ، أوجد قيم كل من ن، ص، س

٢٨ الصف الثالث الثانوى - كتاب الطالب

التقييم: الحوار والمناقشة

- ناقش مع طلابك من بند حاول أن تحل وتوصل معهم الى الاجابات الصحيحة.
- كلف طلابك بحل بند حاول أن تحل للتأكد من لفهم طلابك للأمثلة التى تم حلها مع الطلاب.

(١)

$$\frac{\text{ع}_{٦}}{\text{ع}_{٥}} = \frac{٨-٥+١}{٥} \times \frac{٢}{\text{س}^{٣}} = \frac{٨}{٥\text{س}^{٣}}$$

$$\frac{٨}{٥\text{س}^{٣}} = \frac{٢٥}{٨} \times \text{س}^{٣} = \frac{٦٤}{١٢٥} \qquad \therefore \text{س} = \frac{٤}{٥}$$

$$\text{ع}_{\text{ر}+١} = {}^{٨}\text{ق}_{\text{ر}} \left(\frac{٢}{\text{س}}\right)^{\text{ر}} (\text{س}^{٢})^{٨-\text{ر}}$$

$$\therefore \text{س}^{١٦-٣\text{ر}} = \text{س}^{٠} \qquad \therefore \text{ر} = \frac{١٦}{٣} \notin \text{ص}^{\infty}$$

∴ لا يوجد حل خالى من س

(٢)

$$\frac{\text{ع}_{٥}}{\text{ع}_{٤}} = \frac{\text{ع}_{٦}}{٢٥\,\text{ع}_{٧}}$$

$$\therefore \frac{٨-٤+١}{٤} \times \frac{١}{\text{س}\sqrt{\text{س}}} = \frac{٦}{٨-٦+١} \times \frac{\text{س}\sqrt{\text{س}}}{٢٥}$$

$$\frac{٥}{٤\text{س}\sqrt{\text{س}}} = \frac{٢\text{س}\sqrt{\text{س}}}{٢٥}$$

$$\therefore ٨\text{س}^{٣} = ١٢٥ \qquad \text{س} = \frac{٥}{٢}$$

(٣)

$$\frac{\text{ع}_{١٠}}{\text{ع}_{٩}} = \frac{٢}{٣} \qquad \therefore \frac{\text{ن} - ٩ + ١}{٩} \times \frac{\text{س}}{٣} = \frac{٢}{٣} \quad (١)$$

$$\frac{\text{ع}_{١٥}}{\text{ع}_{١٤}} = \frac{١}{٤} \qquad \therefore \frac{\text{ن} - ١٤ + ١}{١٤} \times \frac{\text{س}}{٣} = \frac{١}{٤} \quad (٢)$$

$$\text{بقسمة } (١ \div ٢) \qquad \therefore \frac{\text{ن} - ٨}{\text{ن} - ١٣} \times \frac{١٤}{٩} = \frac{٢ \times ٤}{٣}$$

$$١٢\text{ن} - ١٥٦ = ٧\text{ن} = ٥٦ \qquad ٥\,\text{ن} = ١٠٠ \qquad \text{ن} = ٢٠$$

$$\therefore \frac{١٢}{٩} \times \frac{\text{س}}{٣} = \frac{٢}{٣} \qquad \text{س} = \frac{١٨}{١٢} = \frac{٣}{٢}$$

(٤)

$$\frac{\text{ع}_{٤}}{\text{ع}_{٣}} = \frac{\text{ن} - ٣ + ١}{٣} \times \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{٤}{١} \quad (١)$$

$$\frac{\text{ع}_{٥}}{\text{ع}_{٤}} = \frac{\text{ن} - ٤ + ١}{٤} \times \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{٥}{٢} \quad (٢)$$

بقسمة ÷ ٢

$$\frac{(\text{ن} - ٢) \times ٤}{٣\,(\text{ن} - ٣)} = \frac{٤ \times ٢}{٥} = ٥\text{ن} - ١٠ = ٦\text{ن} - ١٨$$

$\text{ن} = ٨$ **بالتعويض عن** $\text{ن} = ٨$ ر (١)

$$\therefore ٢\,\text{ص} = ٤\text{س} \qquad \text{ص} = ٢\text{س}$$

$$\text{ع}_{٣} = ١١٢ \qquad \therefore {}^{٨}\text{ق}_{٢}\ \text{ص}^{٢}\ \text{س}^{٦} = ١١٢$$

$$\therefore \text{ص}^{٢}\ \text{س}^{٦} = ٤،\ \text{ص} = ٢\text{س}$$

حل المعادلتين $\text{س} = \pm ١،\ \text{ص} = \pm ٢$

- أعط طلابك مثال رقم ١٧، ١٨ ص٣٣ وناقش مع طلابك المفردات الخاصة بالمثالين حيث يتعرض المثالين لقيمة ر ثم بعد ذلك قيم طلابك من خلال الحوار والمناقشة فى بند حاول أن تحل (١٧) ص٣٣

تمارين (١-٣)

١ أ   ٢ ج   ٣ د   ٤ أ   ٥ أ

٩ $ع_{٢} : ع_{٣}$ من مفكوك $(ا + ب)^{ن} = \frac{ع_{٤}}{ع_{٣}}$ من مفكوك $(ا + ب)^{ن+٣}$

$$\frac{ن - ٢ + ١}{٢} \times \frac{ب}{ا} = \frac{(ن + ٣) - ٣ + ١}{٣}$$

$$\frac{ن - ١}{٢} = \frac{ن + ١}{٣} \qquad \therefore ن = ٥$$

١١ $\frac{ع_{١٠}}{ع_{٩}} = \frac{ن - ٩ + ١}{٩} \times \frac{٣}{٢س^{٣}} = ١$ (١)

$\frac{ع_{٧}}{ع_{٦}} = \frac{ن - ٦ + ١}{٦} \times \frac{٣}{٢س^{٣}} = \frac{١٥}{٨}$ (٢)

بقسمة ١ ÷ ٢ ينتج أن

$$\frac{٦(ن - ٨)}{٩ \times (ن - ٥)} = \frac{٨}{١٥}$$

$$٥ن - ٤٠ = ٤ن - ٢٠ \qquad ن = ٢٠$$

١٢ $ح_{٢}$ وسط حسابى للحدين الأول والثالث

$٢ح_{٢} = ح_{١} + ح_{٣}$ $\therefore ٢ = \frac{ع_{١}}{ع_{٢}} + \frac{ع_{٣}}{ع_{٢}}$

$$٢ = \frac{١}{ن - ١ + ١} \times \frac{س}{ص} + \frac{ن - ٢ + ١}{٢} \times \frac{ص}{س}$$

$$٢ = \frac{١}{ن} \times \frac{٢ص}{ص} + \frac{ن - ١}{٢} \times \frac{ص}{٢س}$$

$\frac{٢}{ن} + \frac{ن - ١}{٤} = ٢$ $\therefore ٨ + ن^{٢} - ن = ٨ن$

$ن^{٢} - ٩ن + ٨ = ٠$ ن = ٨ ، ن = ١ مرفوض

١٤ أ $ع_{ر+١}$ فى مفكوك $(س٢ - \frac{١}{س^{٢}})^{١٠}$

$\therefore ع_{ر+١} = {}^{١٠}ق_{ر} \left(\frac{-١}{س^{٢}}\right)^{ر} (س^{٢})^{١٠-ر}$

$س^{٢-٢ر-٢ر} = س^{٠}$ ر = ٥

ب $\frac{ع_{٤}}{ع_{٣}} = \frac{١٠ - ٣ + ١}{٣} \times \frac{-١}{س^{٤}} = \frac{-١}{٦}$

$س^{٤} = ١٦$ $س = \pm ٢$

مثال

إيجاد أكبر حد

٤ أوجد معامل أكبر حد فى مفكوك $(٢س + ٣ص)^{١٠}$

الحل

$\because \frac{ع_{ر+١}}{ع_{ر}} = \frac{١٠ + ١ - ر}{ر} \times \frac{٣}{٢}$ $\therefore \frac{ع_{ر+١}}{ع_{ر}} = \frac{١١ - ر}{ر} \times \frac{٣}{٢} = \frac{٣٣ - ٣ر}{٢ر}$

أولًا: $\frac{٣٣ - ٣ر}{٢ر} \geqslant ١$ $\therefore ٣٣ - ٣ر \geqslant ٢ر$ $\therefore ٥ر \leqslant ٣٣$ $\therefore ر \leqslant ٦{,}٦$

من ذلك نستنتج أن $ع_{٧} > ع_{٦} > ع_{٥} > \dots > ع_{١}$

ثانيًا: $\frac{٣٣ - ٣ر}{٢ر} \leqslant ١$ $\therefore ٣٣ - ٣ر \leqslant ٢ر$ $\therefore ٥ر \geqslant ٣٣$ $\therefore ر \geqslant ٦{,}٦$

من ذلك نستنتج أن $ع_{١١} > ع_{١٠} > ع_{٩} > ع_{٨} > ع_{٧}$

$\therefore ع_{٧}$ هو أكبر حد فى مفكوك $(٢س + ٣ص)^{١٠}$ $\therefore$ معامل $ع_{٧} = {}^{١٠}ق_{٦} \times ٢^{٤} \times ٣^{٦}$ $\therefore$ معامل $ع_{٧} = ٢٤٤٩٤٤٠$

تمارين (١-٣)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ من مفكوك $(س + ص)^{١٠}$ الحد التاسع : الحد الثامن تساوى ....

أ $\frac{٣ص}{٨س}$ ب $\frac{٣س}{٨ص}$ ج $\frac{٨ص}{٣س}$ د $\frac{٨س}{٣ص}$

٢ من مفكوك $(١ - س)^{١٢}$ معامل الحد السادس : معامل الحد الخامس ....

أ $(\frac{٨}{٥})$ ب $\frac{٥}{٨}$ ج $\frac{-٨}{٥}$ د $\frac{-٥}{٨}$

٣ من مفكوك $(س + ص)^{٨}$ تكون نسبة $\frac{ع_{٦}}{ع_{٤}}$ = ...

أ $\frac{٢٥ص^{٢}}{١٦س^{٢}}$ ب $\frac{٢٥س^{٢}}{١٦ص^{٢}}$ ج ١   د $\frac{ص^{٢}}{س^{٢}}$

٤ من مفكوك $(٣ا - ٢ب)^{١١}$ إذا كانت النسبة بين الحدين الأوسطين على الترتيب تساوى $\frac{-٣}{٢}$ فإن ا : ب = ...

أ ٩ : ٤   ب ٤ : ٩   ج ١   د -١

ثانيًا : أجب عن الأسئلة الآتية:

٥ من مفكوك $(٢س^{٢} + \frac{٣}{س^{٢}})^{١١}$ أوجد كلًّا من:

أ $\frac{ع_{٣}}{ع_{٢}}$ ب $\frac{ع_{٤}}{ع_{٥}}$ ج $\frac{ع_{٦}}{ع_{٨}}$ د $\frac{معامل\ ع_{٤}}{معامل\ ع_{٦}}$

٦ من مفكوك $(١ + س)^{١٢}$ إذا كان $ع_{٣} = ٢ع_{٢}$ أوجد قيمة س ....

٧ من مفكوك $(ا + ب)^{ن}$ إذا كان $ع_{٢} = ٢٤٠$ ، $ع_{٣} = ٧٢٠$ ، $ع_{٤} = ١٠٨٠$ أوجد قيمة كلًّا من ا ، ب ، ن

٨ إذا كانت $ع_{٢} : ع_{٣}$ من مفكوك $(ا + ب)^{ن}$ تساوى النسبة بين $ع_{٣} : ع_{٤}$ من مفكوك $(ا + ب)^{ن+٣}$ أوجد قيمة ن

٩ من مفكوك $(١ + م س)^{ن}$ إذا كانت $٤ع_{٦} = ٧ع_{٨}$ ، $\frac{ع_{٤}}{ع_{٦}} = \frac{١}{٤}$ ملاحظة وذلك عندما س = ١ أوجد قيمة كل من م ، ن

١٠ من مفكوك $(٢س + \frac{٣}{س^{٢}})^{ن}$ إذا كان $ع_{٩} = ع_{١٠}$ ، $\frac{ع_{٦}}{ع_{٧}} = \frac{٨}{١٥}$ أوجد قيمة ن، ثم أثبت أن هذا المفكوك لا يحتوى على حد خال من س.

١١ من مفكوك $(س + ص)^{ن}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان الحد الثانى وسط حسابى بين الحد الأول والحد الثالث عندما س = ٢ص أوجد قيمة ن

ملخص الوحدة

١ ${}^{ن}ل_{ر} = ن(ن-١)(ن-٢) \dots (ن - ر + ١)$

٢ ${}^{ن}ل_{ر} = \frac{|ن}{|ن-ر}$

٣ $|١ = |٠ = ١$

٤ ${}^{ن}ق_{ر} = \frac{{}^{ن}ل_{ر}}{|ر} = \frac{|ن}{|ر\ |ن-ر}$

٥ ${}^{ن}ق_{ن} = {}^{ن}ق_{٠} = ١$

٦ ${}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن-ر}$

٧ إذا كان ${}^{ن}ق_{س} = {}^{ن}ق_{ص}$ فإن س = ص أو س + ص = ن

٨ $\frac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن}ق_{ر-١}} = \frac{ن - ر + ١}{ر}$

٩ ${}^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر-١} = {}^{ن+١}ق_{ر}$

١٠ ${}^{ن}ق_{ر} : {}^{ن-١}ق_{ر-١} = \frac{ن}{ر}$

١١ $(س \pm ا)^{ن} = س^{ن} \pm {}^{ن}ق_{١} س^{ن-١} ا + {}^{ن}ق_{٢} س^{ن-٢} ا^{٢} \pm ا^{ن}$

$(س - ا)^{ن} = س^{ن} - {}^{ن}ق_{١} س^{ن-١} ا + {}^{ن}ق_{٢} س^{ن-٢} ا^{٢} + (-ا)^{ن}$

١٢ $(س + ا)^{ن} + (س - ا)^{ن} = ٢$ [مجموع الحدود الفردية الرتبة]

١٣ $(س + ا)^{ن} - (س - ا)^{ن} = ٢$ [مجموع الحدود الزوجية الرتبة]

١٤ $(١ \pm س)^{ن} = ١ \pm {}^{ن}ق_{١} س + {}^{ن}ق_{٢} س^{٢} \pm {}^{ن}ق_{٣} س^{٣} + \dots + (\pm س)^{ن}$

١٥ الحد العام فى مفكوك $(س + ا)^{ن}$ هو $ع_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر} س^{ن-ر} ا^{ر}$

الحد الأوسط فى مفكوك $(س + ا)^{ن}$

أ إذا كانت ن فردية يوجد حدان أوسطان رتبتاهما $\frac{ن + ١}{٢}$ ، $\frac{ن + ٣}{٢}$

ب إذا كانت ن زوجية يوجد حدٌّ وسط وحيد رتبته $\frac{ن + ٢}{٢}$

١٦ النسبة بين حددين متتاليين من مفكوك ذات الحدين $(س + ا)^{ن} = \frac{ح - ر + ١}{٢} \times \frac{ا}{س}$

١٧ النسبة بين معاملى حدين متتاليين من مفكوك ذات الحدين $(س + ا)^{ن} = \frac{ن - ر + ١}{ر} \times \frac{معامل\ الثانى}{معامل\ الأول}$

تمارين عامة

أولا:

(١) أ (٢) ج (٣) ج

(٤) ج (٥) ج (٦) ج

(٧) د (٨) ب (٩) ج

(١٠) ج (١١) ب

(١٤) $^{ن}ل_{ر} = ٥٠٤٠$ ∴ $\underline{|ر} \times {}^{ن}ق_{ر} = ٥٠٤٠$

∴ $\underline{|ر} = ٢٤ = \underline{|٤}$ $ر = ٤$

$^{ن}ل_{٤} = ٥٠٤٠ = {}^{١٠}ل_{٤}$ ∴ $ن = ١٠$

(٢١) $^{ن}ل_{ر} = ١٢٠ \times {}^{ن}ل_{ر}$ ∴ $\underline{|ر} \times {}^{ن}ل_{ر} = ١٢٠ \times {}^{ن}ل_{ر}$

$\underline{|ر} = \underline{|٥}$ $ر = ٥$

∴ أقل قيمة $\underline{|ن}$ بجعل العبارة

$^{ن}ل_{٥} = ١٢٠ \times {}^{ن}ق_{٥}$ ص $ن = ٥$

(٢٣) أ بوضع س = ١

∴ $١ + {}^{١٠}ق_{١} + {}^{١٠}ق_{٢} = {}^{١٠}ق_{١٠} = ٢^{١٠}$

ب بوضع س = -١

$١ - {}^{١٠}ق_{١} + {}^{١٠}ق_{٢} - {}^{١٠}ق_{٣} + \quad = $ صفر

ج بوضع س = ٣ المفكوك $= ٤^{١٠}$

(٢٦) ٢ معامل $ح_{١٠}$ = معامل $ح_{٩}$ + معامل $ح_{١١}$

$$٢ = \frac{\text{معامل } ع_{٩}}{\text{معامل } ع_{١٠}} + \frac{\text{معامل } ع_{١١}}{\text{معامل } ع_{١٠}}$$

$$٢ = \frac{٩}{ن-٩+١} \times \frac{١}{١} + \frac{ن-١٠+١}{١٠} \times ١$$

$$٢ = \frac{٩}{ن-٨} + + \frac{ن-٩}{١٠}$$

∴ $ن = ٢٣$ ، $ن = ١٤$

(٢٧) $\frac{ح_{٨}}{ح_{٧}} = \frac{٦}{١٤}$ ∴ $\frac{ن-٧+١}{٧} \times \frac{س}{١} = \frac{٣}{٧}$ (١)

$\frac{ح_{٧}}{ح_{٦}} = \frac{١٤}{٢١}$ ∴ $\frac{ن-٦+١}{٦} \times \frac{س}{١} = \frac{٢}{٣}$ (٢)

بقسمة ١ ÷ ٢ ينتج أن

$$\frac{(ن-٦)\times ٦}{(ن-٥)\times ٧} = \frac{٣\times٣}{٢\times٧}$$

تمارين عامة

أولًا: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) المقدار $^{ن}ل_{ر} : {}^{ن-١}ل_{ر-١} =$
أ ن ب ر ج $\frac{ن}{ر}$ د $\frac{ر}{ن}$

(٢) إذا كان $\underline{|س-٣} \times {}^{س}ل_{٣} = ٢٠ \underline{|س-٢}$ فإن س =
أ صفر ب ٢ ج ٥ د ٤

(٣) إذا كان $^{١٤}ق_{ر+٢} = {}^{١٤}ق_{ر+٢}$ فإن ر = .
أ ٢ ب ٤ ج ٣ د ٢ أو ٣

(٤) $^{ن}ل_{ر} \div {}^{ن}ل_{ر-١} =$
أ ن-ر ب ن - ر - ١ ج ن - ر + ١ د ن + ر

(٥) المقدار $^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر+١}$
أ $^{ن+١}ق_{ر}$ ب $^{ن}ق_{ر+١}$ ج $^{ن+١}ق_{ر+١}$ د $^{ن+١}ق_{ر+٢}$

(٦) إذا كان $^{٩}ق_{ر} > {}^{٩}ق_{ر-١}$ فإن
أ ر < ٤ ب ر > ٤ ج ر < ٥ د ر > ٥

(٧) إذا كان $^{س+ص}ل_{٣} = ٢١٠$ ، $^{س-ص}ق_{٣} = ٣٥$ فإن $\underline{|٢س-ص} =$
أ ٥ ب ١٠ ج ٢ د ١

(٨) إذا كان $^{٧}ق_{ر} > ١$ ، $^{ر}ق_{٥} > ١$ فإن قيمة $\underline{|٦-ر} =$ ....
أ صفر ب ١ ج ٧٢٠ د ٦

(٩) من مفكوك $(١+س)^{ن} = ١ + أ_{١}س + أ_{٢}س^{٢} + أ_{٣}س^{٣} + أ_{٤}س^{٤} + ... + أ_{١٠}س^{١٠}$ وكان $\frac{أ_{٢}+أ_{٣}}{أ_{٢}} = ٣$ فإن ن = ...
أ ٤ ب ٦ ج ٨ د ٩

(١٠) إذا كان $١ + \frac{٥}{٢}س + \frac{٥\times٤}{\underline{|٢}٤}س^{٢} + \frac{٥\times٤\times٣}{\underline{|٢}٨}س^{٣} + ... + \frac{١}{٣٢}س^{٥} = ١٠٢٤$ فإن س = ...
أ ٥ ب ٤ ج ٦ د ٨

(١١) من مفكوك $(أس + ب)^{٢ن+١}$ إذا كان الحدان الأوسطان متساويين عند س = ٢ فإن = ...
أ أ = ٢ب ب ب = ٢أ ج أب = ٢ د أب = $\frac{١}{٢}$

ثانيًا : أجب عما يأتى :

(١٢) إذا كان $^{٦}ل_{ر} = ٤ \times {}^{٦}ل_{ر-١}$ ، $\underline{|ن-ر} = ٦$ أوجد كلًّا من ن ، ر

(١٣) إذا كان $^{ن}ق_{ن-٢} = ٤٥$ ، $^{م}ل_{م-٣} = ٤$ أوجد قيمة $^{ن}ق_{ر-٢} \div {}^{ن}ق_{ر-١}$

(١٤) إذا كان ن (ن-١) (ن-٢) .... (ن - ر + ١) = ٥٠٤٠ ، $^{ن}ق_{ر} = ٢١٠$ أوجد قيمة $^{ن+١}ق_{ر٢}$.

(١٥) إذا كان $^{ن}ق_{٣} = ١٢٠$ ، $^{ن}ق_{ر+٢ر} = {}^{ن}ق_{ر+٥}$ أوجد قيمة $^{ن}ق_{٧ر+٣}$

(١٦) إذا كان $^{ن}ق_{ر} \div {}^{ن}ق_{ر-١} = ٥ : ٧$ ، $^{ن}ل_{ر} \div {}^{ن}ل_{ر-١} = ٥$ أوجد قيمة كل من ن، ر.

(١٧) إذا كان $^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر-١} : {}^{ن-١}ق_{ر-٢} = ٧ : ٤ : ٦$ فأوجد قيمتى ن، ر.

(١٨) إذا كان لدينا الأعداد ١، ٢، ٣، ٤، ٥ فأوجد كم عددًا زوجيًا أكبر من ٣٠٠ يمكن تكوينه من هذه الأرقام .

(١٩) إذا كان $\underline{|ن} = ٧٢٠$ ، $^{ن+١}ق_{ر} : {}^{ن+١}ق_{ر-١} = \frac{٣}{٥}$ أوجد قيمة $^{ن+١}ق_{ر-٢}$

(٢٠) إذا كان $^{ن+٢}ق_{ر+١} = ٩ \times {}^{ن+١}ق_{ر} = ٩٠ \times {}^{ن}ق_{ر-١}$ أوجد قيمة كل من ن، ر.

(٢١) إذا كان $^{ن}ل_{ر} = ١٢٠ \times {}^{ن}ق_{ر}$ أوجد قيمة $^{١٢}ق_{٢ر}$
ثم احسب أقل قيمة لـ ن

(٢٢) أثبت أن: $^{ن}ق_{١} + (٢ \times {}^{ن}ق_{٢}) + (٣ \times {}^{ن}ق_{٣}) + (٤ \times {}^{ن}ق_{٤}) + ... + (ن \times {}^{ن}ق_{ن}) = ن \times ٢^{ن-١}$

(٢٣) إذا كان $(١ + س)^{١٠} = ١ + {}^{١٠}ق_{١}س + {}^{١٠}ق_{٢}س^{٢} + ... + {}^{١٠}ق_{١٠}س^{١٠}$ استخدم ذلك فى إيجاد:
أ $١ + {}^{١٠}ق_{١} + {}^{١٠}ق_{٢} + ... + {}^{١٠}ق_{١٠}$
ب $١ - {}^{١٠}ق_{١} + {}^{١٠}ق_{٢} - .... + {}^{١٠}ق_{١٠}$
ج $١ + ٣٠ + ٩ \times {}^{١٠}ق_{٢} + ٦٤ \times {}^{١٠}ق_{٣} + ... + (٣)^{١٠}$

(٢٤) من مفكوك $(س^{٢} + \frac{١}{س})^{ن}$ إذا كان معامل الحد الرابع يساوى معامل الحد الثالث عشر، أوجد قيمة ن، ثم أوجد رتبة وقيمة الحد الخالى من س.

(٢٥) من مفكوك $(١ + س)^{ن}$ إذا كان $(ع_{٣})^{٢} = ع_{٢} \times ع_{٥}$ أوجد قيمة ن عندما س = $\frac{٩}{٥}$

(٢٦) من مفكوك $(١ + س)^{ن}$ إذا كان معامل $ع_{١٠}$ هو الوسط الحسابى بين معامل $ع_{٩}$ ، معامل $ع_{١١}$ أوجد كلًّا من:
أ ن ب $^{ن}ل_{٣}$ ج $\underline{|ن-١٩}$

(٢٧) من مفكوك $(١+س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان $ع_{٨} : ع_{٧} : ع_{٦} = ٦ : ١٤ : ٢١$ أوجد قيمة كل من ن ، س

(٢٨) اكتب النسبة بين $\frac{ع_{ر+١}}{ع_{ر}}$ من مفكوك $(١ + س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية، ثم أوجد بالنسبة لقيمة ر ما تساويه هذه النسبة من مفكوك $(١ + س)^{١٢}$ واحسب قيمة ر التى تجعل هذا النسبة أكبر من واحد.

$٤ن - ٢٤ = ٣ن - ١٥$ ∴ $ن = ٩$

∴ $\frac{٣}{٧} \times س = \frac{٣}{٧}$ ∴ $س = ١$

(٣٣) $ح_٦ = ٢ ح_٧$ ∴ $\frac{ح_٧}{ح_٦} = \frac{١}{٢}$

∴ $\frac{١٠ - ٦ + ١}{٦} \times \frac{س}{١} = \frac{١}{٢}$

$\frac{٥}{٦} س = \frac{١}{٢}$ $س = \frac{٣}{٥}$

(٣٤) $ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر} \left(\frac{١}{س}\right)^{ر} (س^٢)^{ن-ر}$

∴ $س^{٢ن-٣ر} = س^{٠}$ $٢ن = ٣ر$

$ر = \frac{٢ن}{٣}$ لا يوجد حد خال من س إلا اذا كانت ن مضاعف للعدد ٣

$ر = \frac{٢٤}{٣} = ٨$ $ح_٩ = {}^{١٢}ق_{٨}$

(٣٧) $\frac{معامل\ ح_٦}{معامل\ ح_٤} = \frac{٨}{٢٧}$

$\frac{معامل\ ح_٦}{معامل\ ح_٥} \times \frac{معامل\ ح_٥}{معامل\ ح_٤} = \frac{٨}{٢٧}$

$\frac{ن - ٥ + ١}{٥} \times \frac{ن - ٤ + ١}{٤} \times \left(\frac{\frac{٢}{٣}}{\frac{٣}{٢}}\right)^٢ = \frac{٨}{٢٧}$

$\frac{ن - ٤}{٥} \times \frac{ن - ٣}{٤} \times \frac{٢}{٣} = \frac{٨}{٢٧}$

$ن = ٩$

(٤٧) $ح_{ر+١} = {}^{١٥}ق_{ر} \left(\frac{جـ}{س^٣}\right)^{ر} (س^٢)^{١٥-ر}$

∴ $س^{٣٠-٥ر} = س^{١٠}$

∴ $ر = ٤$ ، $٣٠ - ٥ر = ١٥$ $ر = ٣$

معامل $س^{١٠}$ = ٢ معامل $س^{١٥}$

∴ معامل $ح_٥$ = ٢ معامل $ح_٤$

$\frac{معامل\ ح_٥}{معامل\ ح_٤} = ٢$

∴ $\frac{١٥ - ٤ + ١}{٤} \times \frac{جـ}{١} = ٢$ ∴ $جـ = \frac{٢}{٣}$

(٥٦) $ح_{ر+١} = {}^{٣ن}ق_{ر} \left(\frac{١}{س}\right)^{ر} (س^٢)^{٣ن-ر}$

∴ $س^{٦ن-٣ر} = س^{٣ن}$ ∴ $ر = ن$

تمارين عامة

(٢٩) من مفكوك $(١ + م س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كانت الحدود الثلاثة الأولى هى على الترتيب ١ ، $\frac{-١٠}{٣}$ س ، $٥س^٢$ أوجد قيمة م ، ن ثم احسب قيمة الحد الأوسط من هذا المفكوك عندما س = ٣.

(٣٠) إذا كانت رتبة الحد الخالى من س من مفكوك $(٢س^٢ - \frac{٣}{س})^{٢١}$ تساوى رتبة الحد الخالى من س من مفكوك $(س + \frac{١}{س})^{٢ن}$ أوجد قيمة ن ثم أوجد النسبة بين الحدين الأوسطين من المفكوك الثانى .

(٣١) من مفكوك $(٤س٣ + \frac{١}{س^٢})^{١٣}$ أوجد معامل س٥ ثم أوجد قيمة س التى تجعل الحدين الأوسطين من هذا المفكوك متساويين ثم أثبت أنه لا يوجد حد خالٍ من س فى هذا المفكوك .

(٣٢) من مفكوك $(١ + س)^{ن}$ إذا كانت معاملات ثلاثة حدود متتالية هى ٣٥ ، ٢١ ، ٧ أوجد قيمة ن ورتبة الحدود الثلاثة .

(٣٣) إذا كان الحد الأوسط من مفكوك $(١ + س)^{١٠}$ يساوى ضعف الحد السابع أوجد قيمة س

(٣٤) إذا كان مفكوك $(س^٢ + \frac{١}{س})^{ن}$ يحتوى على حد خالٍ من س فأثبت أن ن مضاعف للعدد ٣ ، ثم أوجد قيمة هذا الحد عندما ن = ١٢.

(٣٥) إذا كان الحدان الأوسطان فى مفكوك (٢س +٣)١٧ متساويين فيما قيمة س؟

(٣٦) إذا كان أ ، ب هما الحدان الأوسطان فى مفكوك $(س - \frac{١}{س})^{١٥}$ حسب قوى س التنازلية فأثبت أن $أ + ب س^٢ = ٠$

(٣٧) إذا كانت نسبة معامل الحد السادس إلى معامل الحد الرابع فى مفكوك $(\frac{٣}{٢} + \frac{٢س}{٣})^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية يساوى ٨ : ٢٧ فما قيمة ن.

(٣٨) أوجد قيمة س التى تجعل الحد الثالث فى مفكوك $(٢س^٢ + \frac{١}{٢})^{٧}$ حسب قوى س التنازلية مساويًا الحد السادس.

(٣٩) إذا كان $ح_٤ = \frac{٢٥}{٣} ح_٢$ ، $ح_٥ = ح_٦$ من مفكوك $(١ + س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية فأوجد قيم كل من ن، س

(٤٠) إذا كان ن عددًا صحيحًا موجبًا وكان: $(١ + جـ س)^{ن} = ١ + م_١ س + م_٢ س^٢ + م_٣ س^٣ + م_٤ س_٤ + ..$ وكان $م_١ = ١٢$ ، $م_٤ = ٤م_٢$ أوجد قيمة كل من ن، جـ

(٤١) إذا كانت الحدود: الثالث والرابع والخامس فى مفكوك $(س + ص)^{ن}$ على الترتيب حسب قوى س التنازلية هى ١١٢ ، ٤٤٨ ، ١١٢٠، فأوجد قيمة كل من س، ص ، ن.

(٤٢) إذا كانت الحدود: الثانى والثالث والرابع فى مفكوك $(س + ص)^{ن}$ على الترتيب حسب قوى س التنازلية هى ٢٤٠ ، ٧٢٠، ١٠٨٠ ، فأوجد قيمة كل من س ، ص ، ن.

(٤٣) إذا كانت معاملات ثلاثة حدود متتالية فى مفكوك $(١ + س)^{ن}$ على الترتيب هى ١٥، ٢٤، ٢٨ حسب قوى س التصاعدية، فما قيمة ن ورتب هذه الحدود؟

٣٣ كتاب الجبر والهندسة الفراغية - الجبر

الوحدة الأولى: التباديل والتوافيق ونظرية ذات الحدين

(٤٤) أوجد فى مفكوك $(\frac{٢س}{٣} + \frac{٣}{٢س^٢})^{١٢}$.

كلًّا من : ١ - الحد الأوسط ٢ الحد المشتمل على س٣

(٤٥) أوجد الحد الخالى من س فى مفكوك $(س + \frac{١}{س})^{٦} - (س - \frac{١}{س})^{٦}$

(٤٦) فى مفكوك $(٢س + \frac{٣}{س^٢})^{ن}$ كان الحد التاسع والعاشر متساويين بين الحد السادس والحد السابع كنسبة ٨ : ١٥، فأوجد قيمة ن وأثبت أن المفكوك لا يحتوى على حد خالٍ من س

(٤٧) فى مفكوك $(س^٢ + \frac{جـ}{س^٣})^{١٥}$ أوجد قيمة جـ التي تجعل معامل $س^{١٠}$ ضعف معامل $س^{١٥}$

(٤٨) فى مفكوك $(س^٢ + \frac{١}{س})^{١٥}$ أوجد النسبة بين الحد الخالى من س ومجموع معاملى الحدين الأوسطين.

(٤٩) فى مفكوك $(س^{ك} + \frac{١}{س})^{٨}$ حيث ك عدد صحيح موجب أوجد :

أ) قيم ك التى تجعل للمفكوك حدًّا خاليًا من س

ب) النسبة بين الحد الخالى من س ومعامل الحد الأوسط وذلك لأكبر القيم التى حصلت عليها فى أولًا.

(٥٠) إذا كان : $(١ + س)^{ن} = أ_. + أ_١ س + أ_٢ س^٢ + ..$ أن $س^{ن}$ فأثبت أن :

أ) $\frac{أ_١}{أ_.} + \frac{٢أ_٢}{أ_١} + \frac{٣أ_٣}{أ_٢} + .. + \frac{ن أ_ن}{أ_{ن-١}} = \frac{ن}{٢} (ن + ١)$

ب) $أ_. + ٢أ_١ + ٤أ_٢ + ٨أ_٣ + .. + ٢^{ن} أ_ن = ٣^{ن}$

(٥١) إذا كان الحد الثالث فى مفكوك $(٢س + \frac{١}{س^٢})^{ن}$ حسب قوى س التنازلية خاليًا من س فأوجد قيمة ص التى تجعل هذا الحد مساويًا للحد الثانى فى مفكوك $(١ + ص^٣)^{٣٠}$

(٥٢) فى مفكوك $(س^٢ + \frac{١}{أس})^{٨}$ إذا كان معامل الحد الأوسط يساوى س١٠ فأوجد قيمة أ.

(٥٣) فى مفكوك $(س^٢ - \frac{١}{س})^{١٤}$ أثبت أنه لا يوجد حد خالٍ من س ، ثم أوجد النسبة بين الحد السابع والحد السادس فى هذا المفكوك عندما س = -١

(٥٤) فى مفكوك $(٩س^٢ + \frac{١}{٣س})^{٩}$ أوجد قيمة الحد الخالى من س ، ثم أثبت أن الحدين الأوسطين متساويان عندما $س = \frac{١}{٣}$

(٥٥) فى مفكوك $(س^٢ + \frac{١}{س})^{٩}$ أوجد قيمة الحد الخالى من س ، و إذا كانت النسبة بين الحد الخالى من س والحد السادس تساوى ٣:٢ ، فأوجد قيمة س الحقيقية.

(٥٦) فى مفكوك $(س٢ + \frac{١}{س})^{٣ن}$ أوجد معامل $س^{٣ن}$ ، و إذا كانت ن = ٦ فأوجد النسبة بين معامل $س^{٣ن}$ ومعامل الحد الأوسط.

٣٤ الصف الثالث الثانوى - كتاب الطالب

اختبار تراكمى

اختبار تراكمى

(١) من مفكوك $(١ + س)^{١٧}$ إذا كان معامل $ع_{ر+٤}$ = معامل $ع_{٣ر+٣}$ فإن ر = ...

أ ٣ ب ٤ ج ١٧ د ٧

(٢) من مفكوك $(١ + س)^{٢٧}$ إذا كانت النسبة بين الحدين الأوسطين = ١:٣ فإن س = ...

أ ٤ ب ٣ ج $\frac{١}{٣}$ د $\frac{١}{٤}$

(٣) المقدار $(\sqrt{٢} + ١)^{٥} - (\sqrt{٢} - ١)^{٥}$ = ...

أ -٨٢ ب ٨٢ ج $٥٨\sqrt{٢}$ د $-٥٨\sqrt{٢}$

(٤) الحد الرابع من مفكوك $(\frac{س}{٣} + \frac{٣}{س})^{٦}$ هو:

أ ٢٠ س ب $\frac{٢٠}{س}$ ج ٢٠ د ٢٠ $س^{٢}$

(٥) الحد الأخير من مفكوك $(٢ - س)^{٥}(٢ + س)^{٥}$ هو ....

أ $س^{٥}$ ب $-س^{٥}$ ج $-س^{١٠}$ د $س^{١٠}$

(٦) من مفكوك $(١ + س)^{ن}$ أثبت أن $\frac{ع_{ر+١}}{ع_ر} = \frac{ن - ر + ١}{ر}$ س وإذا كان معامل $ع_{١٣}$ حسب قوى س التصاعدية من هذا المفكوك يساوى معامل $ع_{١٤}$ أوجد قيمة ن وإذا كان $\frac{ع_٧}{ع_٥} = \frac{١١}{١٢}$ أوجد قيمة س

(٧) أ إذا كان $^{ن}ق_{٢} + {}^{ن}ق_{٣} = ن^{٢} + ٦ن + ٥$ أوجد قيمة ن.

ب أوجد قيمة الحد الخالى من س فى مفكوك $(\frac{١}{س^{٢}})(س + \frac{١}{س^{٣}})^{١٠}$

(٨) من مفكوك $(١ + س)^{ن}$ إذا كان $ع_٥ = ع_٦$ وكان ٣ $ع_٤$ = ٢٥ $ع_٢$ أوجد قيمة كل من ن، س ثم احسب قيمة $^{ن}ق_{٦}$ س

(٩) من مفكوك $(١ - م س)^{ن}$ إذا كان الحد الثانى = $\frac{-١}{٤}$ س وكان الحد الثالث $\frac{٣}{١٠٠}$ $س^{٢}$ أوجد قيمة كل من م، ن.

(١٠) فى مفكوك $(\frac{٣س}{٢} + \frac{٢}{٣س^{٢}})^{١٢}$ أوجد الحد الأوسط والحد الذى يشتمل على $س^{-٣}$ وإذا كانت النسبة بينهما تساوى $\frac{٧}{٤}$ أوجد قيمة س.

(١١) لدينا الأرقام ١، ٢، ٣، ٤، ٥ ، اكتب عدد الأرقام التى يمكن تكوينها، مستخدمًا هذه الأعداد للحصول على عدد أقل من ٤٠٠.

(١٢) إذا كانت النسبة بين الحدود: الخامس والسادس والسابع فى مفكوك $(\frac{٣س}{٢} + \frac{٢}{٣س})^{ن}$ هى ٤٠ : ٢٤ : ١١ ، أوجد كلًّا من ن، س

كتاب الجبر والهندسة الفراغية - الجبر ٣٥

∵ ن = ٦

∴ معامل $س^{١٨}$ = معامل الحد الأوسط = معامل $ح_٧$

معامل $ح_٧$ = معامل $ح_{١٠}$

∴ $\frac{^{١٨}ق_{١٢}}{^{١٨}ق_{٩}} = \frac{معامل\ ع_٧}{معامل\ ع_{١٠}} = \frac{٢١}{٥٥}$

اختبار تراكمى:

(١) أ (٢) ج (٣) ب (٤) ج (٥) ج

(٧)

أ $^{ن}ق_{٢} + {}^{ن}ق_{٣} = ن^{٢} + ٦ن + ٥$

∴ بالفك

$\frac{ن(ن-١)}{٢} + \frac{ن(ن-١)(ن-٢)}{٦} = ن^{٢} + ٦ن + ٥$

ن (ن-١) (ن+١) = ٦ (ن+٥) (ن+١) ⟸ ن = ١٠

ب الحد الخالى من س ن مفكوك $\frac{١}{س^{٢}}(س + \frac{١}{س^{٣}})^{١٠}$

$ع_{ر+١} = \frac{١}{س^{٢}} \times {}^{١٠}ق_{ر} (\frac{١}{س^{٣}})^{ر} \times س^{١٠-ر}$

∴ $س^{١٠-ر-٣ر-٢} = س^{٢}$

∴ -٤ر = -٨

ر = ٢

∴ $ع_٣ = {}^{١٠}ق_{٢}$ هو الحد الخالى

(٩) $\frac{ع_٣}{ع_٢} = \frac{\frac{٣}{١٠٠}س^{٢}}{\frac{-١}{٤}س}$

∴ $\frac{ن - ٢ + ١}{٢} \times \frac{-م\ س}{١} = \frac{١٢\ س}{-١٠٠}$

(ن - ١) م = $\frac{٢٤}{١٠٠}$ (١) $ح_٢ = -\frac{١}{٤}$ س

$^{ن}ق_{١}$ (- م س) = $-\frac{١}{٤}$ س ن م = $\frac{١}{٤}$

∴ ن = $\frac{١}{٤م}$ ∴ $(\frac{١}{٤م} - ١)$ م = $\frac{٢٤}{١٠٠}$

$\frac{١}{٤} - م = \frac{٦}{٢٥}$

م = $\frac{١}{٤} - \frac{٦}{٢٥} = \frac{٢٥ - ٢٤}{١٠٠}$ م = $\frac{١}{١٠٠}$

ن = $\frac{١}{٤ \times \frac{١}{١٠٠}}$ = ٢٥

(١٣)

$\frac{ع_٦}{ع_٥} = \frac{٢٤}{٤٠}$

∴ $\frac{ن - ٥ + ١}{٥} \times \frac{٤}{٩س^{٢}} = \frac{٢٤}{٤٠}$ (١)

$\frac{ع_٧}{ع_٦} = \frac{١١}{٢٤}$

∴ $\frac{ن - ٦ + ١}{٦} \times \frac{٤}{٩س^{٢}} = \frac{١١}{٢٤}$ (٢)

من ١ ، ٢ ينتج ان ن = ١٦ بالتعويض عن ن = ١٦

∴ س = $\pm\frac{٤}{٣}$

الوحدة الثانية

الأعداد المركبة

Complex numbers

مقدمة الوحدة

سبق وأن درس الطالب المجموعات المختلفة للأعداد ، فقد درس الأعداد الطبيعية ثم الأعداد الصحيحة ثم الأعداد الحقيقية ثم الأعداد النسبية، وسوف تستكمل حلقة الأعداد بالأعداد المركبة أو مايطلق عليها الأعداد التخيلية Complex number وتبعًا لهذا سنتطرق إلى الصورة المثلثية للعدد المركب ثم نتناول نظرية ديموافر والجذور التكعيبية للواحد الصحيح.

وتتكون هذه الوحدة من ثلاث دروس

الدرس الأول: الصورة المثلثية للعدد المركب

الدرس الثانى: نظرية ديموافر

الدرس الثالث: الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

وقبل البدء فى عرض دروس الوحدة ، اطلب إلى طلابك قراءة المقدمة الموضحة فى كتاب الطالب والتى توضح الكثير من المعلومات على مكتشف الأعداد المركبة (العالم ارجاند).

مخرجات التعلم :

فى نهاية هذه الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف معنى العدد المركب
- يمثل العدد المركب بيانيًا
- يمثل بيانيًا مجموع عددين مركبين
- يتعرف مقياس العدد المركب
- يتعرف سعة العدد المركب
- يستنتج السعة الأساسية للعدد المركب
- يتعرف الصورة المثلثية للعدد المركب.
- يوجد المقياس والسعة لحاصل ضرب عددين مركبين وخارج قسمتهما.
- يتعرف نظرية ديموافر لأس صحيح موجب
- يتعرف نظرية ديموافر لأس نسبى موجب
- يوجد جذور العدد المركب

أولاً: الجبـــر

الوحدة الثانية

الأعداد المركبة

Complex number

مقدمة الوحدة

يعد (جان روبير أرجاند) من أعلام الرياضيين البارزين، وهو أول من درس الأعداد المركبة complex numbers تفصيليًا واستخدمها فى إثبات أن لجميع المعادلات الجبرية جذورًا سواء حقيقية أم تخيلية، وتمثل الأعداد المركبة بالشكل أو المخطط المعروف بمخطط Argand Diagram تكريمًا للعالم الفرنسى أرجاند، أما بنقطة (س، ص) حيث س العدد الحقيقى على المحور السينى، وتمثل ص العدد التخيلى على المحور الصادى أو بكمية متجهه (Vector) مقدارها يساوى $س^2 + ص^2$ واتجاهها $ظا^{-1} \frac{ص}{س}$. كما ستتعرف فى هذه الوحدة علي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح وحل تطبيقات على الأعداد المركبة التى تدخل فى حياتنا كالكهرباء والديناميكا والنظرية النسبية ، وميادين الفيزياء المختلفة ، وهذه الأعداد هى أعداد مرنة لها القدرة على الوصول إلى النتيجة النهائية بشكل مرض.

أهداف الوحدة

فى نهاية الوحدة وبعد تنفيذ الأنشطة فيها، يتوقع من الطالب أن يكون قادرًا على أن:

- يمثل العدد المركب ومرافقه بيانيًا بنقاط (أزواج مرتبه) فى مستوى إحداثى
- يحدد المقياس والسعة للعدد المركب.
- يتعرف السعة الأساسية للعدد المركب.
- يتعرف الصور المثلثية للعدد المركب.
- يتعرف نظرية ديموافر وتطبيقاتها.
- يستنتج الجذور النونية لأى عدد مركب.
- يعبر عن جا نθ، جتا نθ بدلالة النسب المثلثية للزاوية ومضاعفاتها.
- يتعرف مفكوك جا θ، وجتا θ كمتلسلات.
- يستنتج قانون أويلر من خلال المتسلسلات.
- يتعرف ويطبق طرق التحويل بين الصور المختلفة للعدد المركب.
- يتعرف الجذور التكعيبية للواحد الصحيح.
- يتعرف المقياس والسعة لحاصل ضرب عددين مركبين ولخارج قسمتهما.
- يجرى العمليات الأساسية على العدد المركب فى الصورة المثلثية.
- يحل تطبيقات على الجذور التكعيبية للواحد الصحيح.
- يستخدم الأعداد المركبة فى حل المشكلات الرياضية.
- يستخدم بعض برامج الحاسوب فى حل مشكلات رياضية تتضمن أعدادًا مركبة.
- يستنتج خواص عمليتى الجمع والضرب على الأعداد المركبة.
- يستنتج خواص عمليتى الجمع والضرب على الأعداد المركبة.
- يستنتج خواص العددين المترافقين.
- يستنتج خواص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

٣٦ الصف الثالث الثانوى - كتاب الطالب

- يمثل جذر العدد المركب علي شكل ارجاند
- يوجد الجذر التكعيبي للواحد الصحيح.
- يتعرف خواص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح
- يمثل الجذور التكعيبية للواحد هندسيًا
- يوجد مرافق الأعداد أ+ω ، أ ت + ω
- يوظف نظرية ديموافر فى حل بعض المشكلات الرياضية
- يحل مسائل رياضية باستخدام الصورة المثلثية للعدد المركب
- يستخدم خواص الجذور التكعيبية فى حل بعض المشكلات الرياضية .
- يوظف المقياس والسعة للعدد المركب فى حل المشكلات الحياتية المرتبطة بالبيئة.

زمن تدريس الوحدة :

٦ حصص

مكان التدريس:

الفصل الدراسى

المخطط التنظيمى للوحدة :

يتناول المخطط التنظيمى للوحدة الأعداد المركبة ويتفرع منها الصورة المثلثية للعدد المركب ونتناول بالتفصيل مستوى ارجاند والتمثيل البيانى له، وكذلك نتعرف علي مقياس العدد المركب وكذلك سعته، ونتناول المقياس والسعة لحاصل ضرب عددين صحيحين وخارج قسمتهما.

ومن جهة أخرى نتطرق إلى مفهوم نظرية ديموافر لأى عدد صحيح وكذلك لأى عدد نسبى موجب ثم نوجد جذور العدد المركب وتمثيله على شكل ارجاند وأخيرًا نتناول الجذور التكعيبية للواحد الصحيح وخواص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح وتمثيله هندسيًا والتعرف علي مرافق الأعداد أ +ω ، أ ت + ω.

مصطلحات أساسية

مستوى أرجاند	Argand diagram	صور مثلثة	Trigonometric	جذر تكعيبى	cubic root
مرافق	conjugate	نظرية ديموافر	demoivres thearem	دائرة الوحدة	Unitcircle
مقياس	Modulus	جذر	root	قطبى	Polar
سعة أساسية	principle omplitude	جذر تربيعى	square root		

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية

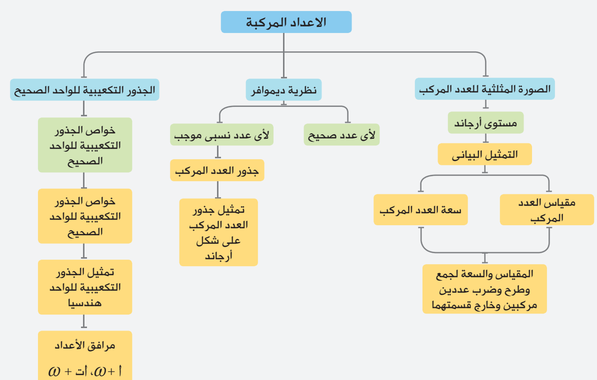
دروس الوحدة

الدرس (٢-١): الصورة المثلثية للعدد المركب

الدرس (٢-٢): نظرية ديموافر

الدرس (٢-٣): الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

مخطط تنظيمى للوحدة



مصادر التعلم

كتاب الطالب من ص (٣٨) إلى ص (٦٣)

طرق التدريس المقترحة :

العرض المباشر - العصف الذهنى - المناقشة والحوار- حل المشكلات - الاكتشاف

الوسائل التعليمية المستخدمة

السبورة التعليمية - أقلام - آلة حاسبة علمية - حاسب آلى .

طرق التقييم المستخدمة

تتمثل فى الاسئلة الشفهية والتحريرية الفردية والجماعية قبل وبعد التدريس، وفى أثناء الدرس ، الأنشطة المقترحة، وسلم التقييم للأنشطة المختلفة الموجودة بالوحدة ، والتكاليف الفردية والجماعية واختبار الوحدة والاختبار التراكمى (تقييم ذاتى)

٢ - ١ الصورة المثلثية للعدد المركب

Trigonometric form a complex number

خلفية:

سبق وأن درس الطالب الأعداد المركبة علي الصورة ع = س + ت ص حيث س ، ص أعداد حقيقية ، ت^{٢} = -١ ، واستكمالا لذلك سوف ندرس فى هذا الدرس صور اخرى لكتابة العدد المركب وهى الصورة المثلثية للعدد المركب وكيفية تمثيل ذلك بيانيًا

أهداف الدرس:

- يمثل العدد المركب فى مستوى ارجاند
- يمثل مجموع عددين مركبين بيانيًا
- يتعرف مقياس العدد المركب
- يتعرف سعة العدد المركب
- يتعرف الصورة المثلثية للعدد المركب
- يوجد الصورة المثلثية للعدد المركب
- يوجد المقياس والسعة لحاصل ضرب عددين مركبين وخارج قسمتهما.
- يحل مسائل متنوعة باستخدام الأعداد المركبة .

المواد التعليمية المستخدمة

آلة حاسبة بيانية

طرق التدريس المستخدمة (المقترحة)

العرض المباشر - المناقشة والحوار - حل المشكلات - العصف الذهنى.

مكان التدريس:

الفصل الدراسى

مصادر التعلم:

كتاب الطالب من ص (٣٨) إلى ص(٤٩)
الشبكة الدولية للمعلومات (الانترنت)

الوحدة الثانية

٢ - ١ الصورة المثلثية للعدد المركب

Polar form of a complex number

سوف تتعلم

- التمثيل البيانى للعدد المركب ومرافقة فى مستوى أرجاند.
- التمثيل البيانى لمجموع عددين مركبين.
- مقياس العدد المركب.
- سعة العدد المركب.
- السعة الأساسية للعدد المركب.
- الصورة المثلثية للعدد المركب.
- المقياس و السعة لحاصل ضرب عددين مركبين وخارج قسمتهما.

مصطلحات أساسية

- مستوى أرجاند *Argand diagram*
- مرافق *Conjugate*
- مقياس *Modulus*
- سعة أساسية *Principle amplitude*
- صورة مثلثية *Trigonmetric form*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية *Scientific calculator*

سبق أن درست الأعداد المركبة، وعلمت أن العدد المركب يمكن كتابته على الصورة ع = س + ص ت (الصورة الجبرية)، حيث س ، ص عددان حقيقيان ، ت^{٢} = - ١ و فى هذا الدرس سوف نتعرف على صورة أخرى لكتابة العدد المركب، وكيفية تمثيله بيانيًا.

الإحداثيات القطبية والديكارتية:

الشكل المقابل يمثل دائرة طول نصف قطرها نق، أ (س ، ص) تقع على الدائرة وتقابل زاوية θ.

جتاθ = $\frac{س}{نق}$ ، جا θ = $\frac{ص}{نق}$

س = نق جتا θ ، ص = نق جاθ

حيث نق = $\sqrt{س^{٢} + ص^{٢}}$ ، ظا = $\frac{ص}{س}$) أى أن :θ = ظا$^{-١}$ $\frac{ص}{س}$ و إذا تأملنا المستوى الديكارتى على أنه مستوى قطبى بحيث ينطبق المحور القطبى على الجزء الموجب لمحور السينات فإنه يمكننا تحويل الإحداثيات القطبية إلى ديكارتية والعكس .

تحويل الإحداثيات القطبية إلى احداثيات ديكارتية

إذا كانت النقطة أ فى الإحداثيات القطبية هى (ل، θ) فإن الإحداثيات الديكارتية لنفس النقطة هى (س، ص) حيث :

س = ل جتاθ ، ص = ل جاθ

ويكون: (س، ص) = (ل جتاθ ، ل جا θ)

مستوى أرجاند

قام العالم الرياضى "أرجاند" بتمثيل العدد المركب ع بيانيًا على مستوى إحداثيات متعامدة، وجعل المحور الأفقى س س َ يمثل الجزء الحقيقى من العدد المركب وجعل المحور الرأسى ص ص َ يمثل الجزء التخيلى من العدد المركب. فتكون النقطة التى إحداثيها (س، ص) تمثل العدد المركب س + ت ص

مثال

١ فى شكل أرجاند المجاور نلاحظ أن النقطتين اللتين تمثلان العددين ع$_{٢}$ ، - ع$_{٢}$ متماثلتان بالنسبة لنقطة الأصل (و).

ع$_{١}$ = ٢ + ت
ع$_{٢}$ = -١ + ٢ ت
ع َ$_{١}$ = ٢ - ت
-ع$_{٢}$ = -٢ - ت

٣٨ الصف الثالث الثانوى - كتاب الطالب

التهيئة:

- استرجع مع طلابك مفهوم الاعداد المركبة (الصورة الجبرية)
- ناقش مع طلابك مقدمة الوحدة عن مكتشف الأعداد المركبة ومدى اهميتها فى تقدم العلوم الأخرى.

إجراءات الدرس

- ناقش مع طلابك مفهوم الإحداثيات القطبية والديكارتية وطريقة التحويل بينهما مع إعطاء أمثلة تستخدم فيها الآلة الحاسبة
- لتحويل الصورة الاحداثية (٣، ٣$\sqrt{٣}$) إلى احداثيات قطبية تستخدم المفاتيح

SHIFT + (pol) 3 SHIFT) (,) √ 3 ▷) =

تعطى r = 6 ، $\theta = 60°$

تفكير ناقد :

- اعد مثال التفكير الناقد ص(٣٩) من كتاب الطالب لطلابك وناقش اجاباتهم على مستوى ارجاند .
- ساعد طلابك فى تمثيل بعض النقاط على مستوى ارجاند للتدريب عليها

كذلك نلاحظ أن النقطتين اللتين تمثلان العددين المترافقين $ع_١$، $\overline{ع_١}$ متماثلتان بالنسبة للمحور $\overleftrightarrow{س س'}$

حاول أن تحل

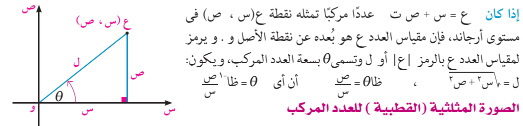
(١) مَثِّل على شكل أرجاند كل من الأعداد:

$ع = ٣ + ٤ت$ ، $\overline{ع}$ ، $-ع$ ، $١ + ع$

تفكير ناقد: ما الذى تمثله جميع الأعداد المركبة ع التى جزءها الحقيقى يساوى ٢ على شكل أرجاند.

تعلم

المقياس والسعة للعدد المركب *The modulus and the amplitude (argument) of a complex number*



إذا كان $ع = س + ص ت$ عددًا مركبًا تمثله نقطة ع(س ، ص) فى مستوى أرجاند، فإن مقياس العدد ع هو بُعده عن نقطة الأصل و . و يرمز لمقياس العدد ع بالرمز |ع| أو ل وتسمى θ بسعة العدد المركب، ويكون:

$ل = \sqrt{س^٢ + ص^٢}$ ، $ظا\theta = \frac{ص}{س}$ أن أى $\theta = ظا^{-١} \frac{ص}{س}$

الصورة المثلثية (القطبية) للعدد المركب *Polar form of a complex number*

إذا كان $ع = س + ص ت$ عددًا مركبًا وسعته الأساسية θ حيث $\theta \in]-\pi ، \pi]$ فإنه يكتب بالصورة $ع = ل (جتا\theta + ت جا\theta)$ ويتحدد قياس θ تبعًا للحالات الآتية:

(أ) $س > ٠$ ، $ص > ٠$ فإن θ تقع فى الربع الأول $\theta = ظا^{-١} (\frac{ص}{س})$

(ب) $س < ٠$ ، $ص > ٠$ فإن θ تقع فى الربع الثانى $\theta = \pi + ظا^{-١} (\frac{ص}{س})$

(جـ) $س < ٠$ ، $ص < ٠$ فإن θ تقع في الربع الثالث $\theta = -\pi + ظا^{-١} (\frac{ص}{س})$

(د) $س > ٠$ ، $ص < ٠$ فإن θ تقع فى الربع الرابع $\theta = ظا^{-١} (\frac{ص}{س})$

لاحظ أن

$س > ٠$، $ص = ٠$ فإن $\theta = ٠$

$س < ٠$، $ص = ٠$ فإن $\theta = \pi$ [as printed: ٠]

$س = ٠$، $ص > ٠$ فإن $\theta = \frac{\pi}{٢}$

$س = ٠$، $ص < ٠$ فإن $\theta = \frac{-\pi}{٢}$

مثال

(٢) أوجد المقياس والسعة الأساسية لكل من الأعداد المركبة الآتية:

(أ) $ع_١ = -\sqrt{٣} + ت$ (ب) $ع_٢ = -١ - ت$

الحل

$\because$ صورة العدد المركب هى : $ع = س + ت ص$ فإن :

(أ) $س = -\sqrt{٣}$ ، $ص = ١$

$\therefore$ العدد $ع_١$ يقع فى الربع الثانى

$ل = \sqrt{س^٢ + ص^٢} = \sqrt{(-\sqrt{٣})^٢ + (١)^٢} = \sqrt{٤} = ٢$

$\theta = \pi + ظا^{-١} (\frac{-١}{\sqrt{٣}}) = \pi - \frac{\pi}{٦} = \frac{٥\pi}{٦}$

كتاب الجبر والهندسة الفراغية - الجبر ٣٩

فى بند تعلم: المقياس والسعة للعدد المركب:

- وضح لطلابك المقصود بالمفهوم العام لمقياس العدد المركب حيث مقياس العدد المركب ع يرمز له بالرمز |ع|

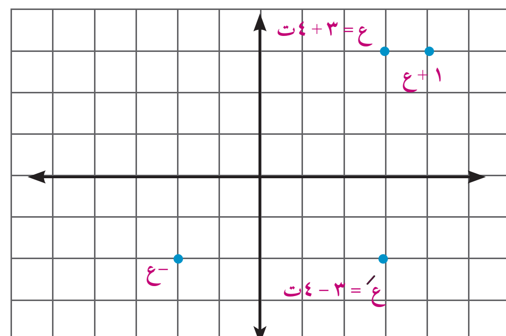
أى $|ع| = \sqrt{س^٢ + ص^٢}$

ونلاحظ أن ع عدد غير سالب بمعنى أن:

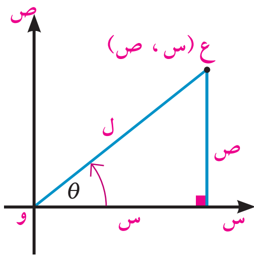
$ع \geqslant ٠$ وأن $|ع| = ٠$ إذا كانت $ع = ٠$

- وضح لطلابك المقصود بالسعة حيث يرمز للسعة بالرمز θ ، إذا كانت $-\pi < \theta \leqslant \pi$ فإنها تسمى في هذه الحالة السعة الأساسية للعدد المركب ع

(١) حاول أن تحل ١ ص ٣٩



معلومات اضافية للمعلم:



من الشكل

$جتا\theta = \frac{س}{ل} = \frac{س}{\sqrt{س^٢ + ص^٢}}$ ،

$جا\theta = \frac{ص}{ل} = \frac{ص}{\sqrt{س^٢ + ص^٢}}$ ،

أى $س = ل جتا\theta$

$ص = ل جا\theta$

ويفضل أن نستخدم مباشرة $ظا\theta = \frac{ص}{س}$ وتكون الدالة العكسية لدالة الظل هى $ظا^{-١} \frac{ص}{س}$ تعطى قيمة الزاوية θ.

لاحظ أن العدد الدال على السعة يمكن أن يأخذ عددًا غير منتهية من القيم التى تختلف كل منها عن الأخرى لعدد صحيح من الدورات لأنه إذا كانت θ عدد مركب (ع) فإن كلاً من الأعداد $\theta + ٢ ن \pi$ حيث ن عدد طبيعى يكون أيضًا سعة لنفس العدد المركب (ع).

لاحظ أن سعة العدد المركب صفر غير معرفة وذلك لأن المتجه الصفرى ليس له اتجاه.

لاحظ أيضًا أن يستخدم القانون التالى عند التحويل من قياس سيتينى إلى قياس دائرى وبالعكس.

$$\frac{\theta^{\circ}}{١٨٠} = \frac{\theta^{ء}}{\pi}$$

تمرين إضافى:

(أ) أوجد القياس والسعة للعدد المركب $ع = \sqrt{٣} - ت$

الحل:

$\because ع = \sqrt{٣} - ت$ $\therefore س = \sqrt{٣}$ ، $ص = -١$

$|ع| = ل = \sqrt{س^٢ + ص^٢} = ٢$

وتكون السعة $ظا^{-١} \frac{ص}{س} = ظا^{-١} (\frac{+١}{\sqrt{٣}}) = \frac{\pi}{٦}$

$س > ٠$

$ع = ٢ (جتا \frac{\pi}{٦} + ت جا \frac{\pi}{٦})$

التقييم: الحوار والمناقشة

ناقش مع طلابك بند حاول أن تحل وتوصل معهم للإجابات الصحيحة:

(٢) حاول أن تحل (٢)

أ) ل = $\sqrt{٢+٢}$ = ٢ ، $\theta = \frac{\pi}{٤}$

ب) ل = $\sqrt{١+٣}$ ٢ ، $\theta = \frac{\pi}{٣}$

جـ) ل = $\sqrt{٣}$ ، $\theta = -\frac{-\pi}{٢}$

د) ل = ٥ ، θ = صفر

فى بند تعلم(٢)

¤ وضح لطلابك أن إذا كان ل هو مقياس العدد المركب ع = س + ت ص حيث ع ≠ ٠ وكان θ السعة فإن:

س = ل جتا θ

ص = ل جا θ

∴ يمكن كتابة العدد ل بالصورة

ع = س + ت ص

أى ع = ل جتاθ + ت ل جاθ

∴ ع = ل (جتا θ + ت جا θ)

وهذه هى الصورة المثلثية للعدد ع

تمارين اثرائية :

١- عبر عن كل من الأعداد المركبة التالية بالصورة المثلثية :

أ) - ٢ + ٢ ت ب) ٤ - ٤ $\sqrt{٣}$ ت

الحل

أ) بفرض ع = -٢ + ٢ ت س = -٢ ، ص = ٢

∵ |ع| = ل = $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$

∴ |ع| = ٢$\sqrt{٢}$

س < ٠ ، ص > ٠ ∴ θ= ظا$^{-١}$ ١ = $\frac{\pi}{٤}$

ع = ٢ $\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{\pi}{٤}$ + ت جا $\frac{\pi}{٤}$)

ب) |ع| = $\sqrt{١٦+١٦}$ = ٤ $\sqrt{٢}$

∵ س > ٠ ، ص < ٠

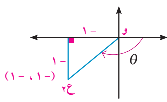
∴ θ= ظا$^{-١}$ $\frac{٤}{٤}$ = $\frac{\pi}{٤}$

ب) س = -١ ، ص = -١

∴ العدد $ع_٢$ يقع فى الربع الثالث

ل = $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$ = $\sqrt{(-١)^٢ + (-١)^٢}$ = $\sqrt{٢}$

θ = - π - ظا$^{-١}$ $(\frac{١}{١})$ = - π + $\frac{\pi}{٤}$ = $\frac{-٣\pi}{٤}$



حاول أن تحل

(٢) أوجد المقياس والسعة الأساسية لكل من الأعداد المركبة الآتية:

أ) $ع_١$ = $\sqrt{٢}$ + $\sqrt{٢}$ ت ب) $ع_٢$ = ١ - $\sqrt{٣}$ ت

جـ) $ع_٣$ = - $\sqrt{٣}$ ت د) $ع_٤$ = ٥

تذكر أن

$\frac{\theta^\circ}{١٨٠^\circ} = \frac{\theta^د}{\pi}$

ويستخدم هذا القانون للتحويل من قياس ستينى إلى قياس دائرى والعكس.

خواص المقياس والسعة لعدد مركب

لكل عدد مركب ع = س + ص ت و سعته θ يكون:

١) |ع| ≥ صفر

٢) سعة العدد المركب تأخذ عددًا غير منتهٍ من القيم، وذلك بإضافة عدد صحيح من دورات ٢π. أى إن سعة العدد المركب تساوى θ + ٢π ن حيث ن عدد صحيح.

٣) |ع| = |$\bar{ع}$| = |-ع| = |-$\bar{ع}$|

٤) ع $\bar{ع}$ = $|ع|^٢$

تفكير ناقد: إذا كانت السعة الأساسية للعدد ع هىθ فأوجد السعة الأساسية لكل من الأعداد -ع ، $\bar{ع}$ ، $\frac{١}{ع}$

مثال

(٣) اكتب كلًّا من الأعداد المركبة الآتية بالصورة المثلثية:

أ) $ع_١$ = ٢ - ٢$\sqrt{٣}$ ت ب) $ع_٢$ = -٤ت جـ) $ع_٣$ = $\frac{٥}{-٢ - ت}$ د) $ع_٤$ = -٢

الحل

∵ صورة العدد المركب هى : س + ت ص لذلك فإن:

أ) س = ٢ ، ص = -٢$\sqrt{٣}$

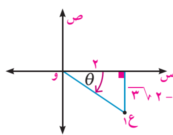
∴ $ع_١$ يقع فى الربع الرابع

ل = |$ع_١$| = $\sqrt{س^٢+ص^٢}$ = $\sqrt{(٢)^٢+(-٢\sqrt{٣})^٢}$ = $\sqrt{١٦}$ = ٤

θ = - ظا$^{-١}$ $(\frac{٢\sqrt{٣}}{٢})$ = $\frac{-\pi}{٣}$

∴ $ع_١$ = ل (جتا θ + ت جا θ)

= ٤ (جتا$(\frac{-\pi}{٣})$ + ت جا$(\frac{-\pi}{٣})$)

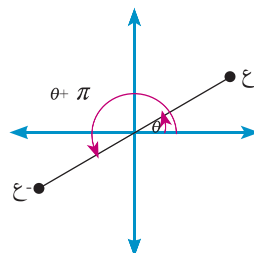


٤٠ الصف الثالث الثانوى - كتاب الطالب

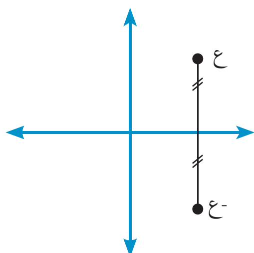
ع = ٤ $\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{\pi}{٤}$ + ت جا $\frac{\pi}{٤}$)

فى بند تفكير ناقد:

يهدف هذا التفكير على صورة العدد المركب ع (-ع) بالأنعكاس حول نقطة الأصل ، $\bar{ع}$ بالأنعكاس حول محور السينات وتتحدد قيمة الزاويةθ لكل منها كما فى الأشكال الآتية



انعكاس حول نقطة الأصل



انعكاس حول محور السينات

لاحظ أن العدد ع ومرافقه لهما نفس السعة ظا$^{-١}$ $\frac{ص}{س}$

الصورة المثلثية للعدد المركب ٢ - ١

ب ∵ س = ٠ ، ص = -٤

∴ ع٢ يقع على محور ص

ل = |ع٢| = $\sqrt{س^٢ + ص^٢} = \sqrt{(٠)^٢ + (-٤)^٢} = ٤$

$\theta = \frac{-\pi}{٢}$ ع٢ = ٤(جتا$(\frac{-\pi}{٢})$ + ت جا$(\frac{-\pi}{٢})$)

ص، س، و، θ، -٤، ع٢

ج ع٣ = $\frac{٥}{-٢ - ت} \times \frac{-٢ + ت}{-٢ + ت}$ بالضرب فى مرافق المقام

= $\frac{٥(-٢ + ت)}{٤ + ١}$ = -٢ + ت ∴ س = -٢ ، ص = ١

∴ ع٣ يقع فى الربع الثانى

ل = |ع| = $\sqrt{س^٢ + ص^٢} = \sqrt{(-٢)^٢ + ١^٢} = \sqrt{٥}$

$\theta = \pi$ - ظا$^{-١}(\frac{١}{٢})$ = ٢,٦٨ء

∴ ع٣ = $\sqrt{٢}$ (جتا ٢,٦٨ء + ت جا ٢,٦٨ء)

ص، ع٣، ١، θ، -٢

د ∵ س = -٣ ، ص = ٠ ∴ ع٤ يقع على محور س

ل = |ع| = $\sqrt{(-٣)^٢ + (٠)^٢}$ = ٣

$\theta = \pi$ ∴ ع٤ = ٣(جتا π + ت جاπ)

حاول أن تحل

٣ اكتب كلًّا من الأعداد الآتية فى الصورة المثلثية:

أ ع١ = ٨ ب ع٢ = ٥ت ج ع٣ = -٣ - ٣ت

مثال

تذكر أن

جتاθ - ت جاθ = جتا$(-\theta)$ + ت جا$(-\theta)$

٤ أوجد المقياس والسعة الأساسية لكل من الأعداد الآتية:

أ ع١ = -٨ (جتا ٤٥° + ت جا ٤٥°)

ب ع٢ = ٢ (جا $\frac{٤}{٣}\pi$ - ت جتا $\frac{٤}{٣}\pi$)

الحل

أ ع١ = -٨ (جتا ٤٥° + ت جا ٤٥°)

= ٨(- جتا ٤٥ - ت جا ٤٥)

∵ س < صفر ، ص < صفر ∴ ع يقع فى الربع الثالث

∵ - جتا ٤٥ = جتا(١٨٠ + ٤٥) ، - جا ٤٥ = جا(١٨٠ + ٤٥)

∴ ع١ = ٨(جتا ٢٢٥ + ت جا ٢٢٥) = ٨(جتا - ١٣٥° + ت جا - ١٣٥°)

∴ مقياس العدد ع١ = ٨ ، السعة الأساسيةθ = -١٣٥°

ص، θ، س، ع١ = ٨

كتاب الجبر والهندسة الفراغية - الجبر ٤١

التقييم والحوار والمناقشة

⌑ ناقش مع طلابك بند حاول أن تحل وتوصل معهم للإجابات الصحيحة.

٣ حاول أن تحل ص (٤١)

أ ع١ = ٨ (جتا ٠ + ت جا ٠)

ب ع٢ = ٥ (جتا $\frac{\pi}{٢}$ + ت جا $\frac{\pi}{٢}$)

ج س < ٠ ، ص < ٠

θ تقع فى الربع الثالث

$\theta = -\pi +$ ظا$^{-١}$ = $-\frac{\pi}{٤}$ ،

ل = $\sqrt{٩ + ٩}$ = ٣ $\sqrt{٢}$

ع = ٣ $\sqrt{٢}$ (جتا ($\frac{-\pi}{٤}$) + ت جا ($\frac{-\pi}{٤}$))

مثال ص ٤٣

⌑ استرجع مع طلابك بعض القوانين مثل :

١ جتا -θ - ت جا θ = جتا (-θ) + ت جا θ

٢ - جا $(\frac{\pi}{٢} + \theta)$ = جتاθ

٣ جتا $(\frac{\pi}{٢} + \theta)$ = - جاθ

٤ جا $(\frac{٣\pi}{٢} + \theta)$ = - جتا θ

٥ جتا $(\frac{٣\pi}{٢} + \theta)$ = - جاθ

تمارين اضافية للمعلم:

عبر عن كل من الأعداد التالية بالصورة المثلثية :

أ ١ ب -١

ج ت د -ت

الحل:

أ نفرض أن ع = ١ = ١ + ٠ × ت

∴ س = ١ ، ص = ٠ ∴ |ع| = ١

∵ جتاθ = ١ ، جا θ =٠ ∴θ = ٠

∴ ١ = (جتا ٠ + ت جا ٠)

ب بفرض أن ع = -١ = -١ + ٠ × ت

س = -١ ، ص = ٠

∴ |ع| = ١

جتاθ = -١ ، جاθ = ٠ ∴$\theta = \pi$

∴ -١ = (جتا π + ت جا π)

ب نفرض أن ع = ت = ٠ + ت

∴ س = ٠ ، ص = ١

∴ |ع| = ١

∵ جتا θ = ٠ ، جا θ = ١ $\theta = \frac{\pi}{٢}$

∴ ت = (جتا $\frac{\pi}{٢}$ + ت جا $\frac{\pi}{٢}$)

د نفرض أن ع = -ت ∴س = ٠ ، ص = -١

∴ |ع| = ١

∵ جتا θ = ٠ ، جاθ = -١ = $\frac{٣\pi}{٢}$

- ت = (جتا$(\frac{٣\pi}{٢})$ + ت جا $\frac{٣\pi}{٢}$)

التقييم : الحوار والمناقشة

¤ ناقش مع طلابك بند حاول أن تحل وتوصل معهم للإجابات الصحيحة :

(٤) حاول أن تحل ص ٤٢

ع$_{١}$ = ٢ (جتا $(\frac{-\pi}{٣})$ + ت جا $(\frac{-\pi}{٣})$)

ل = ٢ ، $\theta = \frac{-\pi}{٣}$

ع$_{٢}$ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (- جا ٤٥ + ت جا ٤٥)

ع$_{٢}$ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (جتا $\frac{٣\pi}{٤}$ ٢ + ت جا $\frac{٣\pi}{٤}$)

ل= ، θ = $\frac{٣\pi}{٤}$

في بند تعلم (٣)

¤ وضح لطلابك بعض الحقائق الأساسية التى يجب علي الطالب اتقانها وهى :

١ جا ($\theta_{١}$+ $\theta_{٢}$) = جا $\theta_{١}$ جتا $\theta_{٢}$+ جتا $\theta_{٢}$ جا $\theta_{١}$

جتا ($\theta_{١}$+ $\theta_{٢}$) = جتا $\theta_{١}$ جتا $\theta_{٢}$ - جا $\theta_{١}$ جا $\theta_{٢}$

٢ جا ($\theta_{١}$- $\theta_{٢}$)

= جا $\theta_{١}$ جتا $\theta_{٢}$ - جتا $\theta_{١}$ جا $\theta_{٢}$

جتا ($\theta_{١}$ + $\theta_{٢}$)

= جتا $\theta_{١}$ جتا $\theta_{٢}$- جا $\theta_{١}$ جا $\theta_{٢}$

٣ جا ٢ θ= ٢ جا θ جتا θ

جاθ = ٢ جا $\frac{\theta}{٢}$ جتا $\frac{\theta}{٢}$

٤ جتا ٢ θ = جتا$^{٢}\theta$ - جا$^{٢}\theta$

= ٢ جتا^{٢} θ -١

= ١ - ٢ جا$^{٢}\theta$

جتاθ = جتا^{٢} $\frac{\theta}{٢}$ - جا^{٢} $\frac{\theta}{٢}$

= ٢ جتا^{٢} $\frac{\theta}{٢}$ -١

= ١ - ٢ جا^{٢} $\frac{\theta}{٢}$

ب ع$_{٢}$= ٢ (جا $\frac{٤}{٣}\pi$ - ت جتا $\frac{٤}{٣}\pi$)

∵ س > ٠ ، ص < ٠ ∴ ع يقع فى الربع الرابع

∵ جا $\frac{٤}{٣}\pi$ = جتا ($\frac{٣\pi}{٢}$ + $\frac{٤}{٣}\pi$) = جتا $\frac{١٧}{٦}\pi$ = جتا ($\frac{٥\pi}{٦}$)

- جتا $\frac{٤}{٣}\pi$ = جا ($\frac{٣\pi}{٢}$ + $\frac{٤}{٣}\pi$) = جا ($\frac{١٧}{٦}\pi$) = جا ($\frac{٥\pi}{٦}$)

∴ ع$_{٢}$ = ٢(جتا $\frac{٥\pi}{٦}$ + ت جا $\frac{٥\pi}{٦}$))

∴ مقياس العدد ع$_{٢}$ = ٢، السعة الأساسية $\frac{٥\pi}{٦}$

تذكر أن

جا ($\frac{\pi}{٢}$ + θ) = جتا θ

جتا ($\frac{\pi}{٢}$ + θ) = - جا θ

جا ($\frac{٣\pi}{٢}$ + θ) = - جتا θ

جتا ($\frac{٣\pi}{٢}$ + θ) = جا θ

حاول أن تحل

(٤) أوجد المقياس والسعة الأساسية لكل من الأعداد المركبة الآتية:

أ ع$_{١}$ = ٢ (جتا $\frac{\pi}{٣}$ - ت جا $\frac{\pi}{٣}$) ب ع$_{٢}$ = $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$ (جا ٤٥° - ت جا ٤٥°)

تعلم ٣

ضرب وقسمة الأعداد المركبة باستخدام الصورة المثلثية

multiplying and dividing complex numbers using the trigonometric form

إذا كان ع$_{١}$ = ل$_{١}$(جتا $\theta_{١}$ + ت جا $\theta_{١}$) ، ع$_{٢}$ = ل$_{٢}$(جتا $\theta_{٢}$ + ت جا $\theta_{٢}$) فإن

١) ع$_{١}$ع$_{٢}$ = ل$_{١}$ل$_{٢}$ (جتا $\theta_{١}$ + ت جا $\theta_{١}$) (جتا $\theta_{٢}$ + ت جا $\theta_{٢}$)

= ل$_{١}$ل$_{٢}$ (جتا($\theta_{١}$ + $\theta_{٢}$) + ت جا($\theta_{١}$ + $\theta_{٢}$)) (١)

أى إن |ع$_{١}$ع$_{٢}$| = ل$_{١}$ل$_{٢}$ = |ع$_{١}$||ع$_{٢}$|

سعة (ع$_{١}$ع$_{٢}$) = $\theta_{١}$ + $\theta_{٢}$

٢) $\frac{ع_{١}}{ع_{٢}}$ = $\frac{ل_{١}}{ل_{٢}}$ × $\frac{جتا \theta_{١} + ت جا \theta_{١}}{جتا \theta_{٢} + ت جا \theta_{٢}}$ = $\frac{ل_{١}}{ل_{٢}}$ (جتا ($\theta_{١}$ - $\theta_{٢}$) + ت جا($\theta_{١}$ - $\theta_{٢}$)) (٢)

أى إن |$\frac{ع_{١}}{ع_{٢}}$| = $\frac{ل_{١}}{ل_{٢}}$ = $\frac{|ع_{١}|}{|ع_{٢}|}$ ، سعة ($\frac{ع_{١}}{ع_{٢}}$) = $\theta_{١}$ - $\theta_{٢}$

استعن بمعلمك لإثبات صحة العلاقات (١) ، (٢)

مثال

(٥) عَبِّر عن ٣ (جتا $\frac{٥\pi}{١٢}$ + ت جا $\frac{٥\pi}{١٢}$) × ٤ (جتا $\frac{\pi}{١٢}$ + ت جا $\frac{\pi}{١٢}$) بالصورة س + ص ت

الحل

٣ (جتا $\frac{٥\pi}{١٢}$ + ت جا $\frac{٥\pi}{١٢}$) × ٤(جتا $\frac{\pi}{١٢}$ + ت جا $\frac{\pi}{١٢}$)

= ٣ × ٤((جتا $\frac{٥\pi}{١٢}$ + $\frac{\pi}{١٢}$) + ت جا($\frac{٥\pi}{١٢}$ + $\frac{\pi}{١٢}$))

= ١٢ (جتا $\frac{\pi}{٢}$ + ت جا $\frac{\pi}{٢}$) = ١٢(٠ + ت (١)) = ١٢ ت

لاحظ أن:

¤ مقياس حاصل ضرب عددين مركبين = حاصل ضرب مقياسيهما .

¤ سعة حاصل ضرب عددين مركبين = مجموع سعتيهما

¤ إذا كان ع = ل (جتاθ + ت جاθ)

فإن ع^{٢} = ل (جتا θ+ ت جاθ) × ل (جتاθ + ت جاθ)

ع^{٢} = ل^{٢} (جتا (θ + θ) + ت جا (θ+ θ))

= ل^{٢} (جتا ٢ θ+ ت جا ٢θ)

وبالتالى:

إذا كان ع = ل (جتا θ + ت جا θ) فإن

ع^{٢} = ل^{٢} (جتا ٢ θ+ ت جا ٢ θ)

¤ إذا كان ع = ل (جتا θت جا θ) ، ن عدد صحيح موجب فإن

عن = لن (جتا نθ + ت جا ن θ)

حاول أن تحل

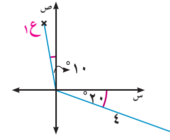
٥ عبر عن ٢(جتا $\frac{\pi}{15}$ + ت جا $\frac{\pi}{15}$) × ٣(جتا $\frac{-2\pi}{5}$ + ت جا $\frac{-2\pi}{5}$) بالصورة س + ت ص

تذكر أن

- ١ = جتا ٠ + ت جا ٠
- −١ = جتا π + ت جا π
- ت = جتا $\frac{\pi}{2}$ + ت جا $\frac{\pi}{2}$
- −ت = جتا $\frac{\pi}{2}$ + ت جا $\frac{\pi}{2}$

مثال

٦ إذا كان $ع_1$ ، $ع_2$ عددين مركبين ممثلين على مستوى أرجاند كما بالشكل المقابل، أوجد على الصورة س + ص ت العدد $\frac{ع_2}{ع_1}$



الحل

من الرسم $|ع_1|$ = ٢ ، سعة $ع_1$= ٩٠° + ١٠° = ١٠٠°

∴ $ع_1$ = ٢(جتا ١٠٠° + ت جا ١٠٠°)

$|ع_2|$ = ٤ ، سعة $ع_2$ = - ٢٠°

∴ $ع_2$ = ٤ (جتا (- ٢٠°) + ت جا (- ٢٠°))

∴ $\frac{ع_2}{ع_1}$ = $\frac{٤}{٢}$ × $\frac{\text{جتا(- ٢٠°) + ت جا(- ٢٠°)}}{\text{٢(جتا١٠٠° + ت جا١٠٠°)}}$

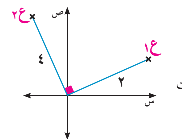
= ٢ [جتا(- ٢٠° - ١٠٠°) + ت جا(- ٢٠° - ١٠٠°)]

= ٢ (جتا(- ١٢٠°) + ت جا (- ١٢٠°))

= ٢ (- $\frac{1}{2}$ - ت × $\frac{\sqrt{3}}{2}$) = - ١ - $\sqrt{3}$ ت

حاول أن تحل

٦ باستخدام مستوى أرجاند المقابل، أوجد $\frac{ع_2}{ع_1}$ على الصورة س + ص ت



نتائج:

١) إذا كان ع = ل(جتا θ + ت جا θ) فإن

(أ) $\frac{1}{ع}$ = $\frac{1}{ل}$ = (جتا (-θ) + ت جا (-θ))
= ل (جتا (-θ) + ت جا (-θ))

(ب) $ع^2$ = $ل^2$(جتا ٢ θ + ت جا ٢ θ)

٢) يمكن تعميم حاصل ضرب عدد محدود من الأعداد المركبة فإذا كان $ع_1$، $ع_2$، ... $ع_ن$ أعدادًا مركبة وكان:
$ع_1$ = $ل_1$(جتا θ_1 + ت جا θ_1) ، $ع_2$ = $ل_2$(جتا θ_2 + ت جا θ_2)، .... ،$ع_ن$ = $ل_ن$(جتا $\theta_ن$ + ت جا $\theta_ن$)
فان: $ع_1 ع_2$ ...... $ع_ن$ = $ل_1 ل_2$ ...... $ل_ن$(جتا (θ_1 + θ_2 + ... + $\theta_ن$) + ت جا (θ_1 + θ_2 + ... + $\theta_ن$))
وفى الحالة الخاصة عندما $ع_1$ = $ع_2$ = ... =$ع_ن$ = ل(جتا θ + ت جا θ) يكون:

$ع^ن$ = $ل^ن$(جتا ن θ + ت جا ن θ)

مثال

٧ ضع العدد ١- ت على الصورة المثلثية، ثم أوجد $(١ - ت)^٨$

كتاب الجبر والهندسة الفراغية - الجبر ٤٣

التقييم المستمر: الحوار والمناقشة:

- ناقش مع طلابك بند حاول أن تحل وتوصل معهم للإجابات الصحيحة

حاول أن تحل ص ٤٣

٥ المقدار = ٢ × ٣ [جتا ($\frac{\pi}{15}$ - $\frac{2\pi}{15}$) + ت جا ($\frac{\pi}{15}$ - $\frac{2\pi}{15}$)]

= ٦ (جتا ($\frac{-\pi}{3}$) + ت جا ($\frac{-\pi}{3}$))] = ٦ ($\frac{1}{2}$ - $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ت)

= ٣ - ٣$\sqrt{3}$ ت

٦ $\frac{ع_2}{ع_1}$ = ٢ (جتا $\frac{\pi}{2}$ + ت جا $\frac{\pi}{2}$)

= ٢ ت

تمارين إثرائية:

إذا كان $ع_1$ = ٢ (جتا ١٢٠° - ت جا ١٢٠°) ،

$ع_2$ = ٣ (جا ١٥٠° + ت جتا ١٥٠°) فأوجد :

الصورة المثلثية لكل من :

أ $ع_1 ع_2$ ب $ع_1^2$ ج $ع_2^4$

الحل:

نضع كل من $ع_1$ ، $ع_2$ على الصورة المثلثية

$ع_1$ = ٢ (جتا ١٢٠° - ت جا ١٢٠°)

$ع_1$ = ٢ [جتا (١٢٠) + ت جا (-١٢٠)]

$ع_2$ = ٣ (جا ١٥٠ ° + ت جتا ١٥٠°)

∴$ع_2$ = ٣ (جا ٣٠ - ت جتا ٣٠)

∴$ع_2$ = ٣ (جتا (-٣٠) + ت جا (٣٠٠))

أ $ع_1 ع_2$ = ٦ [جتا (١٥٠ ° + ت جا (-١٥٠° + ت جا (- ١٥٠ °)]

ب $ع_1^2$ = ٤ [جتا (- ٢٤٠ °) + ت جا (- ٢٤٠°)]

= ٤ [جتا ١٢٠ ° + ت جا ١٢٠°]

ج $ع_2^4$ = $٣^٤$ [جتا (-١٢٠ °) + ت جا (-١٢٠ °)]

التقييم: الحوار والمناقشة:

- ناقش مع طلابك بند حاول أن تحل وتوصل معهم للإجابات الصحيحة

حاول أن تحل ص ٤٤

ع$_1^4$ = ١٦ (جتا ٤٠° + ت جا ٤٠°)

ع$_2^2$ = ٩ (جتا ٨٠° + ت جا ٨٠°)

٧) ع$_1^4$ ع$_2^2$ = ١٤٤ (جتا ١٢٠ + ت جا ١٢٠)

ع$_1^4$ ع$_2^2$ = ٧٢٠ + ٧٢ $\sqrt{٣}$ ت

الصورة الأساسية للعدد الركب (صورة أويلر)

لاحظ أن :

- "هـ" عدد غير نسبي فليس له قيمة مضبوطة بل قيمته تقريبًا تنحصر بين ٢،٧، ٣ تقريبًا هي ٢،٧١٨٢٨ لتسعة أرقام عشرية ، والعدد "هـ" هو أحد الأعداد التى له أهمية كبيرة في الرياضيات والعلوم الطبيعية .
- تعريف (الصورة الأسية للعدد المركب)

إذا كانت ع = س + ص ت حيث

س، ص ∈ ح، ت^2 = -١ فإن هـ^{ع} = هـ^{س} (جتا ص + ت جا ص)

بمعنى أن:

هـ$^{س + ص ت}$ = هـ^{س} (جتا ص + ت جا ص)، ص مقيسة بالتقدير الدائرى.

- نعلم أن الصورة المثلثية للعدد المركب

ع = س + ت ص هى :

ع = ل (جتاθ + ت جاθ) حيث ل = |ع| = $\sqrt{س^2 + ص^2}$

θ = ظا$^{-1}$ $\frac{ص}{س}$

لاحظ أن:

∵ هـ$^{س + ص ت}$ = هـ^{س} × هـ$^{ص ت}$

لكن هـ$^{س + ص ت}$ = هـ^{س} (جتا ص + ت جا ص)؟

هـ$^{ص ت}$ = جتا ص + ت جا ص

وهذه تسمى صورة أويلر

أما إذا كانت ص = ٢ π فإن هـ$^{٢ ط ت}$ = جتا ٢ ط = ت جا ٢ π

أى أن هـ$^{٢ ط ت}$ = ١ وكذلك هـ$^{٢ ط ر ت}$ =١ حيث ر ∈ ص

تذكر أن:

العدد المركب ع = س + ت ص = ل (جتاθ + ت جاθ)

الوحدة الثانية: الأعداد المركبة

الحل

∵ س = ١ ، ص = -١

ل = $\sqrt{س^2 + ص^2}$ = $\sqrt{١^2 + (-١)^2}$ = $\sqrt{٢}$

∵ س > ٠ ، ص < ٠

∴ ع يقع فى الربع الرابع

θ = - ظا$^{-1}$($\frac{-١}{١}$) = - π + $\frac{-\pi}{٤}$

∴ ١ - ت = $\sqrt{٢}$ (جتا$\frac{-\pi}{٤}$ + ت جا$\frac{-\pi}{٤}$)

∴ (١ - ت)^٨ = ($\sqrt{٢}$)^٨ (جتا($\frac{-\pi}{٤}$) + ت جا ($\frac{-\pi}{٤}$))^٨

= ١٦ (جتا (-٢π) + ت جا (-٦π))

= ١٦ (جتا ٠ + ت جا ٠) = ١٦

حاول أن تحل

٧) إذا كان ع$_1$ = ٢(جتا ١٠° + ت جا ١٠°) ، ع$_2$ = ٣(جتا ٤٠° + ت جا ٤٠°)

أوجد العدد ع$_1^4$ ع$_2^2$ على الصورة س + ص ت

الصورة الأسية للعدد المركب (صورة أويلر) *Exponential form of a complex number (Euler form)*

كل دالة فى المتغير س يمكن التعبير عنها كمتسلسلة من قوى س تسمى متسلسلة تايلور (Taylor series) وفيما يلى نورد مفكوك تايلور لبعض الدوال محل الدراسة فى هذه الوحدة.

١) دالة الجيب ص = جا س

جا س = $\frac{س}{|١}$ - $\frac{س^3}{|٣}$ + $\frac{س^5}{|٥}$ - .... + (-١)^ن × $\frac{س^{٢ن+١}}{|٢ن+١}$ + ...

(دالة الجيب دالة فردية جا(-س) = - جا س لذلك المفكوك يحتوى على قوى س الفردية)

٢) دالة جيب التمام ص = جتا س

جتا س = ١- $\frac{س^2}{|٢}$ + $\frac{س^4}{|٤}$ - .... + (-١)^ن × $\frac{س^{٢ن}}{|٢ن}$ + ...

(دالة جيب التمام هى دالة زوجية لأن جتا(-س) = جتا س لذلك المفكوك يحتوى على قوى س الزوجية)

٣) الدالة الأسية ص = هـ^{س}

هـ^{س} = ١ + $\frac{س}{|١}$ + $\frac{س^2}{|٢}$ + $\frac{س^3}{|٣}$ + ... + $\frac{س^ن}{|ن}$ + ...

لاحظ أن

هـ$^{ت س}$ = ١ + $\frac{ت س}{|١}$ + $\frac{ت^2 س^2}{|٢}$ + $\frac{ت^3 س^3}{|٣}$ + ... + $\frac{ت^ن س^ن}{|ن}$ + ...

= ١ + $\frac{ت س}{|١}$ - $\frac{س^2}{|٢}$ - $\frac{ت س^3}{|٣}$ + ...

= (١ - $\frac{س^2}{|٢}$ + $\frac{س^4}{|٤}$ - ....) + ت ($\frac{س}{|١}$ - $\frac{س^3}{|٣}$ + ...)

هـ$^{ت س}$ = جتا س + ت جا س

أضف إلى معلوماتك

معادلة أويلر هـ$^{\pi ت}$ + ١ = صفر و هى تربط بين أشهر ٥ أعداد.

فى صورة أويلر θ يجب أن يكون بالتقدير الدائرى.

أى إن العدد المركب ع = س + ت ص = ل(جتاθ + ت جاθ) يمكن كتابته على الصورة:

ع = ل هـ$^{\theta ت}$ وتسمى صورة أويلر حيث θ بالتقدير الدائرى.

٤٤ الصف الثالث الثانوى - كتاب الطالب

يمكن كتابتها علي الصورة ع = ل هـ$^{\theta ت}$

مثال

(٨) اكتب كلًّا من الأعداد المركبة الآتية على الصورة الأسية (صورة أويلر):

(أ) $ع_١ = ١ + ت$ (ب) $ع_٢ = -\sqrt{٢} + ت$ (جـ) $ع_٣ = هـ^{٣ + \frac{\pi}{٦}ت}$ (د) $ع_٤ = -٢ت$

الحل

(أ) $ع_١ = ١ + ت$ ∴ $س = ١$ ، $ص = ١$

$ل = |ع_١| = \sqrt{(١)^٢ + (١)^٢} = \sqrt{٢}$

∵ $س > ٠$ ، $ص > ٠$ ∴ $ع_١$ يقع فى الربع الأول

$\theta = ظا^{-١}(\frac{١}{١}) = \frac{\pi}{٤}$ ∴ $ع_١ = ل هـ^{\theta ت} = \sqrt{٢} هـ^{\frac{\pi}{٤}ت}$

(ب) $ع_٢ = -\sqrt{٢} + ت$ ∴ $س = -\sqrt{٢}$ ، $ص = ١$

$ل = \sqrt{(-\sqrt{٢})^٢ + (١)^٢} = \sqrt{٣}$

∵ $س < ٠$ ، $ص > ٠$ ∴ $ع_٢$ يقع فى الربع الثانى

∴ $\theta = \pi + ظا^{-١}(\frac{-١}{\sqrt{٢}}) = ٢,٥٣^{ء}$ ∴ $ع_٢ = ل هـ^{\theta ت} = ٢ هـ^{٢,٥٣ ت}$

(جـ) $ع_٣ = هـ^{٣ + \frac{\pi}{٦}ت} = هـ^٣ \times هـ^{\frac{\pi}{٦}ت}$ ويكون $ل = |ع_٣| = هـ^٢$ ، سعة $ع_٣ = \frac{\pi}{٦}$

(د) ∵ $ع_٤ = -٢ت$ ∴ $س = ٠$ ، $ص = -٢$ ∴ $ل = \sqrt{(٠)^٢ + (-٢)^٢} = \sqrt{٤} = ٢$

∵ $س = ٠$ ، $ص = -٢$ ∴ $ع_٤$ يقع على محور ص

∴ $\theta = \frac{-\pi}{٢}$ ∴ $ع_٤ = ٢ هـ^{\frac{-\pi}{٢}ت}$

حاول أن تحل

(٨) إذا كان $ع = \frac{\sqrt{٢} ت}{١ + ت}$ فاكتب العدد ع بالصورة الأسية.

ضرب وقسمة الأعداد المركبة باستخدام الصورة الأسية.

إذا كان $ع_١ = ل_١ هـ^{\theta_١ ت}$ ، $ع_٢ = ل_٢ هـ^{\theta_٢ ت}$

فإن $ع_١ ع_٢ = ل_١ ل_٢ هـ^{\theta_١ ت} \times هـ^{\theta_٢ ت} = ل_١ ل_٢ هـ^{(\theta_١ + \theta_٢)ت}$ ،

$\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{ل_١}{ل_٢} \times \frac{هـ^{\theta_١ ت}}{هـ^{\theta_٢ ت}} = \frac{ل_١}{ل_٢} هـ^{(\theta_١ - \theta_٢)ت}$

مثال

(٩) أوجد ناتج كل مما يأتى فى الصورة الأسية:

(أ) ٢(جتا ٢٥° + ت جا ٢٥°) × ٢(جا ١٥٨° - ت جا ١٥٨°)   (ب) $(\frac{١ + ت}{١ - ت})^٧$

تمرين إضافى:

١ إذا كانت $ع = ١ - \sqrt{٣} ت$ ضع ع على صورة أسية (صورة أويلر).

الحل:

∵ $ع = ١ - \sqrt{٣} ت$ ∴ $س = ١$ ، $ص = -\sqrt{٣}$

∴ $ل = |ع| = \sqrt{س^٢ + ص^٢} = \sqrt{١ + ٣} = \sqrt{٤} = ٢$

$\theta = ظا^{-١}(-\sqrt{٣}) = -\frac{\pi}{٣}$

∵ $ع = ل هـ^{ت\theta}$

$= ٢ هـ^{-\frac{\pi}{٣}ت}$

٢ ضع على الصورة الأسية (صورة أويلر) العدد $ع = ٤(جتا \frac{ط}{٣} - ت جا \frac{ط}{٣})$

الحل:

$ع = ٤(جتا (\frac{-\pi}{٣}) + ت جا (\frac{-\pi}{٣}))$

∴ $ع = ٤ هـ^{-\frac{ت\pi}{٣}}$

٣ ضع على الصورة الأسية العدد $ع = \frac{١}{١ + ت}$

الحل

$ع = \frac{١}{١ + ت} \times \frac{١ - ت}{١ - ت}$

∴ $ع = \frac{١ - ت}{ت + ١} = \frac{١ - ت}{٢} = \frac{١}{٢}(١ - ت)$

∴ $ع = \frac{١}{٢} - \frac{١}{٢} ت$

∴ $ل = |ع| = \sqrt{\frac{١}{٢}}$

∴ $ل = \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$

$\theta = ظا^{-١}(-١) = -\frac{\pi}{٤}$

∴ الصورة الأسية للعدد المركب $ع = \frac{\sqrt{٢}}{٢} هـ \frac{\pi}{٤} ت$

التقييم الحوار والمناقشة:

ناقش مع طلابك فى بند حاول أن تحل وتواصل معهم للاجابة الصحيحة

(٨) $ع = هـ^{\frac{\pi}{٤}ت}$

ضرب وقسمة الأعداد المركبة باستخدام الصورة الأسية :

¤ وضح للطلاب أن :

إذا كانت $ع_١ = ل_١ هـ^{\theta_١ ت}$ ، $ع_٢ = ل_٢ هـ^{\theta_٢ ت}$

فإن $ع_١ ع_٢ = ل_١ ل_٢ هـ^{(\theta_١ + \theta_٢)ت}$

$\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{ل}{ل_٢} هـ^{(\theta_١ + \theta_٢)ت}$

إذا كانت $ع_١ = \sqrt{٢} هـ^{\frac{ت\pi}{٤}}$

$ع_٢ = ٢ هـ^{\frac{-ت\pi}{٤}}$

$ع_١ ع_٢ = ٢ \sqrt{٢} هـ^{\frac{ت\pi}{٤} - \frac{ت\pi}{٣}} = ٢\sqrt{٢} هـ^{\frac{ت\pi}{١٢}}$

$\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{\sqrt{٢} هـ^{-\frac{ت\pi}{٤}}}{٢ هـ^{-\frac{ت\pi}{٣}}} = \frac{\sqrt{٢}}{٢} هـ^{\frac{٧ت\pi}{١٢}}$

التقييم : الحوار والمناقشة :

¤ ناقش مع طلابك بند حاول أن تحل وتوصل معهم للإجابات الصحيحة .

٩ $ع_1 = ٢\left(\text{جتا}\left(\frac{-\pi}{٣}\right) + \text{ت جا}\left(\frac{-\pi}{٣}\right)\right)$

$ع_2 = \sqrt{٢}\left(\text{جتا}\frac{\pi}{٤} + \text{ت جا}\frac{\pi}{٤}\right)$

(أ) $ع_1 ع_2 = ٢\sqrt{٢}\left(\text{جتا}\left(\frac{-\pi}{١٢}\right) + \text{ت جا}\left(\frac{-\pi}{١٢}\right)\right)$

(ب) $\frac{ع_1}{ع_2} = \frac{\sqrt{٢}}{٢}\left(\text{جتا}\frac{٧\pi}{١٢} + \text{ت جا}\frac{٧\pi}{١٢}\right)$

(جـ) $ع_2^{٦} = [\sqrt{٢}\left(\text{جتا}\frac{\pi}{٤} + \text{ت جا}\frac{\pi}{٤}\right)]^{٦}$

$= ٨\left(\text{جتا}\frac{٣\pi}{٢} + \text{ت جا}\left(\frac{٣\pi}{٢}\right)\right)$

حاول أن تحل ص (٤٦)

١٠ $ل = ٨ ، \theta = \frac{\pi}{٦}$

$س = ٨ \times \text{جتا } ٦٠ = ٤$

$ص = ٨ \times \text{جا } ٦٠ = ٤\sqrt{٣}$

$ع = ٤ + ٤\sqrt{٣}$

تمرين إثرائي:

أثبت أن $هـ^{٣ + \pi ت} - هـ - هـ^{-\pi ت} = (١ - هـ)(١ + هـ + هـ^2)$

الحل

$هـ^{٣ + \pi ت} - هـ^{٣} \times هـ^{\pi ت} = هـ^{٣}\left(\text{جتا }\pi + \text{ت جا }\pi\right)$

$= هـ^{٣}(-١ + ٠) = -هـ^{٣}$ (١)

$هـ^{-\pi ت} = ١\left(\text{جتا}(-\pi) + \text{ت جا}(-\pi)\right)$

$= \text{جتا}\pi - \text{ت جا }\pi$

$هـ^{-\pi ت} = -١$ (٢)

بطرح (٢) من (١)

$هـ^{٣ + \pi ت} - هـ^{-\pi ت} = -هـ^{٣} - (-١)$

$= ١ - هـ^{٣}$

$= (١ - هـ)(١ + هـ + هـ^2)$

الحل

أ تحويل $ع_2$ إلى الصورة المثلثية الصحيحة كالآتى:

$\because$ (جا ١٥٨° - ت جا ١٥٨°) = جا (٩٠° + ٦٨°) - ت جتا (٩٠° + ٦٨°) = جتا ٦٨° + ت جا ٦٨°

$\therefore$ ٣ (جتا ٢٥° + ت جا ٢٥°) × ٢ (جتا ٦٨° + ت جا ٦٨°)

= ٦ (جتا (٢٥° + ٦٨°) + ت جا (٢٥° + ٦٨°))

= ٦ (جتا ٩٣° + ت جا ٩٣°) = $٦ هـ^{١,٦٢ ت}$

ب $\because$ ١ + ت = $\sqrt{٢}$ (جتا ٤٥° + ت جا ٤٥°)

١ - ت = $\sqrt{٢}$ (جتا (-٤٥°) + ت جا (-٤٥°))

$\therefore \left(\frac{١ + ت}{١ - ت}\right)$ = جتا (٤٥° + ٤٥°) + ت جا (٤٥° + ٤٥°)

= جتا ٩٠° + ت جا ٩٠° = $\text{جتا}\frac{\pi}{٢} + \text{ت جا}\frac{\pi}{٢}$

$\therefore \left(\frac{١ + ت}{١ - ت}\right)^{٧} = \left(\text{جتا}\frac{\pi}{٢} + \text{ت جا}\frac{\pi}{٢}\right)^{٧} = \text{جتا}\frac{٧\pi}{٢} + \text{ت جا}\frac{٧\pi}{٢}$

$= \text{جتا}\left(\frac{-\pi}{٢}\right) + \text{ت جا}\left(\frac{-\pi}{٢}\right) = هـ^{\frac{-\pi}{٢} ت}$

لاحظ أن

$\frac{٩٣°}{١٨٠°} = \frac{\theta د}{\pi}$

أى أن: $\theta د = \frac{٩٣°}{١٨٠°} \times \pi$

$\theta د \simeq ١,٦٢$

حاول أن تحل

٩ إذا كان $ع_1 = ١ - \sqrt{٣}$ ت ، $ع_2 = ١ + ت$ ، أوجد كلًّا مما يأتى فى الصورة المثلثية:

أ $ع_1 ع_2$ ب $\frac{ع_2}{ع_1}$ ج $(ع_2)^{٦}$

مثال

١٠ عبر عن $ع = \sqrt{٢} هـ^{\frac{٣\pi}{٤} ت}$ بالصورة الجبرية س + ص ت حيث س ، ص ∈ ح

الحل

$\because ع = \sqrt{٢} هـ^{\frac{٣\pi}{٤} ت}$ $\therefore ل = |ع| = \sqrt{٢}$ ، $\theta = \frac{٣\pi}{٤}$

$\therefore ع = \sqrt{٢}\left(\text{جتا}\frac{٣\pi}{٤} + \text{ت جا}\frac{٣\pi}{٤}\right)$

$= \sqrt{٢}\left(\frac{-١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}}ت\right)$

= - ١ + ت

لاحظ أن

$\text{جتا}\frac{٣\pi}{٤} = \text{جتا}١٣٥° = \frac{-١}{\sqrt{٢}}$

$\text{جا}\frac{٣\pi}{٤} = \text{جا}١٣٥° = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

حاول أن تحل

١٠ عبر عن $ع = ٨ هـ^{\frac{\pi}{٦} ت}$ بالصورة الجبرية س = ص ت حيث س ، ص ∈ ح

تمـاريـن (٢ - ١)

اكمل ما يأتى

١ العدد ع = ٣ - ٤ت يُمثَّل على شكل أرجاند بالنقطة ا حيث ا = (........ ، ....)

٢ إذا كانت نقطة ا تمثل العدد ع على مستوى أرجاند، ب تمثل العدد $\overline{ع}$ على مستوى أرجاند، فإن صورة ب بالانعكاس فى ....

٣ مقياس العدد المركب ع = - ٥ ت يساوى ....

٤ إذا كان $ع = \frac{٢ - ت}{٢ + ت}$ فإن |ع| = ...

٥ إذا كانت θ هى السعة الأساسية للعدد المركب ع فإن سعة $\overline{ع}$ هى ....

٦ إذا كان $ع = \frac{١}{ع}$ فإن |ع| = ...

٧ الصورة الأسية للعدد - ١ + ت هى ....

٨ إذا كان ع = ١ + $\sqrt{٣}$ ت فإن السعة الأساسية العدد $(١ + \sqrt{٣} ت)^{٨}$ هى ....

٩ الصورة المثلثية للعدد ع = ٢ - ٢$\sqrt{٣}$ ت هى ....

١٠ إذا كانت سعة العدد المركب ع هى θ فإن سعة العدد المركب ٢ ع هى ....

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١١ إذا كان ع = $\sqrt{٢}$ (جا ٣٠° + ت جتا ٣٠°) فإن السعة الأساسية للعدد ع تساوى ....

أ ٣٠° ب ٦٠° ج ٩٠° د ١٢٠°

١٢ إذا كان $ع = (١ + \sqrt{٣} ت)^{ن}$ و كان |ع| = ٨ فإن السعة الأساسية للعدد ع تساوى ....

أ $\frac{\pi}{٢}$ ب $\frac{\pi}{٣}$ ج $\frac{\pi}{٦}$ د π

١٣ إذا كان $ع_1 = ل_1 (\text{جتا}\theta_1 + \text{ت جا}\theta_1)$ ، $ع_2 = ل_2 (\text{جتا}\theta_2 + \text{ت جا}\theta_2)$ وكان $\theta_1 + \theta_2 = \pi$ فإن $ع_1 ع_2$ = ...

أ $ل_1 ل_2$ ب $- ل_1 ل_2$ ج $ل_1 ل_2 ت$ د $- ل_1 ل_2 ت$

١٤ سعة العدد المركب ع = - ٣ تساوى ....

أ صفر° ب ٩٠° ج ١٨٠° د ٢٧٠°

١٥ إذا كان ع = -١ + $\sqrt{٣}$ ت فإن $|\overline{ع}|$ = ...

أ -١ - $\sqrt{٣}$ ت ب $\sqrt{٢}$ ج ٢ د - ٢

حل بعض تمارين (٢ - ١)

١) أ = (٣، ٤)

٢) محور السينات

٣) ل = ٥

٥) - θ

٦) |ع| = ١

٧) θ

١١) السعر الأساسى للعدد ع = ٣٠°

١٢) ل١ ، ل٢

١٤) π

١٥) ٢

١٩) ٣ (جتا ١٢٠ + ت جا ١٢٠)

٢١) أ) ع١ = ٥ ت

ب) ع٢ = ٤ (جتا ٢١٠ + ت جا ٢١)

ج) ع٣ = (جتا (-٤٥) + ت جا (-١٤٥)

٢٢) ع٤ = ١ + ت $\frac{\text{جا ٢٠}}{\text{جتا ٢٠}}$

ع٤ = $\frac{1}{\text{جتا ٢٠}}$ (جتا ٢٠ + ت جا٢)

٢٣) ع١ = جتا ١١٤ + ت جا ١١٤

ع٢ = جتا ٤٢ + ت جا ١٣٨ ع٢ = جتا ٤٢ + ت جا ٤٢

ع٣ = جا ٢٤ + ت جا ١١٤ ع٣ = جتا ٦٦ + ت جا ٦٦

$\frac{\text{ع١ع٢}}{\text{ع٣}} = \frac{\text{جتا ١٥٦ + ت جا ١٥٦}}{\text{جتا ٦٦ + ت جا ٦٦}}$ = جتا $\frac{\pi}{2}$ + ت جا $\frac{\pi}{2}$ = ت

٢٤) ع١ع٢ = ٨ (جتا ٩٠ + ت جا ٩٠)

ع١ع٢ = ٨ × هـ $\frac{\pi}{2}$ ت

$\frac{\text{ع١}}{\text{ع٢}}$ = × هـ $\frac{\pi}{3}$ ت

٢٥ $\frac{\text{ع١}}{\text{ع٢}}$ = ٢ × هـ ت

١٦) إذا كان ع١ = - ١ - ت فإن الصورة الأسية للعدد ع هى ....

أ) هـ $\frac{3\pi}{4}$ ت ب) هـ $\frac{5\pi}{4}$ ت ج) $\sqrt{2}$ هـ $\frac{-3\pi}{4}$ ت د) $\sqrt{2}$ هـ ٢٢٥ ت

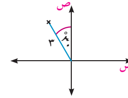
١٧) إذا كان ع١ = ٢ + ٢ $\sqrt{3}$ ت ، ع٢ = - ٣ - ٣ $\sqrt{3}$ فإن سعة العدد ع١ + ع٢ = ...

أ) ٦٠° ب) ٢٤٠° ج) ١٨٠° د) ٣٠٠°

١٨) إذا كان س + ص ت = $\frac{\text{أ + ب ت}}{\text{أ - ب ت}}$ فإن س٢ + ص٢ ....

أ) أ٢ + ب٢ ب) أ٢ - ب٢ ج) ٢أ ب د) ١

١٩) الشكل المقابل يمثل العدد المركب ....



أ) ٣(جتا ٣٠° + ت جا ٣٠°)

ب) ٣(جتا ٦٠° + ت جا ٦٠°)

ج) ٣(جتا ١٢٠° + ت جا ١٢٠°)

د) ٣(جتا ١٥٠° + ت جا ١٥٠°)

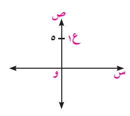
٢٠) إذا كان ع عددًا مركبًا سعته الأساسية θ فإن سعة $\frac{1}{\text{ع}}$ هى .... حيث $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ ، $\theta \neq \pi$

أ) θ ب) - θ ج) $\pi - \theta$ د) $-\pi + \theta$

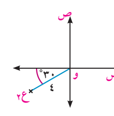
أجب عمّا يأتى:

٢١) اكتب كلًّا من الأعداد الآتية بالصورة المثلثية:

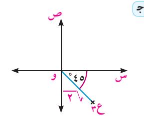
أ)



ب)



ج)



د) ع٤ = - ٣ + ٤ت

هـ) ع٥ = ٤ (جتا ٤٠° - ت جا ٤٠°)

٢٢) أوجد المقياس والسعة الأساسية لكل من الأعداد المركبة الآتية:

أ) ع١ = - ١ + ت

ب) ع٢ = $\frac{4}{\sqrt{3} - \text{ت}}$

ج) ع٣ = - ٢(جتا ٤٥° + ت جا ٤٥°)

د) ع٤ = ١ + ت ظا ٢٠°

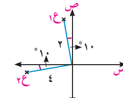
٢٣) إذا كان ع١ = جتا ١١٤° + ت جا ٦٦° ، ع٢ = جتا ٤٢° + ت جا ١٣٨°

ع٣ = جا ٢٤ + ت جا ١١٤، أوجد الصورة الجبرية للعدد: $\frac{\text{ع١ع٢}}{\text{ع٣}}$

٢٤) إذا كان ع١ = ٢ (جتا ٧٥° + ت جا ٧٥°) ، ع٢ = ٤ (جتا ١٥° + ت جا ١٥°)، أوجد على الصورة الأسية العدد:

ع١ع٢ ، $\frac{\text{ع١}}{\text{ع٢}}$

٢٥) فى الشكل المقابل أوجد على الصورة الأسية العدد: $\frac{\text{ع٢}}{\text{ع١}}$



٢٦) اكتب كلًّا من الأعداد الآتية بالصورة الجبرية:

أ) ع١ = هـ $\frac{\pi}{3}$ ت ب) ع٢ = ٢ هـ $\frac{3\pi}{4}$ ت ج) ٣ هـ $\frac{-\pi}{6}$ ت

٢٧) إذا كان ع = ٢(جتا $\frac{\pi}{3}$ + ت جا $\frac{\pi}{3}$) أثبت أن $\frac{1}{\text{ع}}$ = $\frac{1}{2}$ هـ $\frac{5\pi}{3}$ ت

٢٨) إذا كان ع = $\sqrt{3}$ + ت أوجد بالصورة الجبرية ع٦

٢٩) إذا كان ع = $\frac{\text{(أ+ب) + ت (أ-ب)}}{\text{(أ-ب) - ت (أ+ب)}}$ فأوجدالعدد ع فى أبسط صورة ثم أوجد |ع| حيث أ ، ب ∈ ح

٣٠) تفكير إبداعى: إذا كان ع١ = جتا ٧٥ + ت جا ٧٥ ، ع٢ = جتا ١٥ + ت جا ١٥، أوجد بالصورة المثلثية للعدد: ع١ + ع٢

٣١) إذا كان سعة ع١ = $\frac{\pi}{3}$ ، و سعة ع٢ = $\frac{3\pi}{4}$ ، سعة ع٣ = $\frac{\pi}{6}$ أوجد:

أ) سعة (ع١٣ ع٢٢) ب) سعة (٢ع١ . ع٢) ج) سعة ($\frac{\text{ع١ع٢}}{\text{ع٣}}$) د) سعة (ع٣٦)

٣٢) تفكير إبداعى: أثبت أن جتا θ = $\frac{1}{2}$ (هـ$^{\theta\text{ت}}$ + هـ$^{-\theta\text{ت}}$)، جا θ = $\frac{-\text{ت}}{2}$ (هـ$^{\theta\text{ت}}$ - هـ$^{-\theta\text{ت}}$)

الوحدة الثانية

٢ - ٢ نظرية ديموافر

Demoivres theorem

خلفية :

سبق وأن درس الطالب الأعداد المركبة والصورة المثلثية للعدد المركب والعمليات على الأعداد المركبة ، وسوف نتناول في هذا الدرس نظرية ديموافر لأس صحيح موجب ونظرية ديموافر لأى أس نسبى موجب وكذلك نتناول جذور العدد المركب وتمثيل جذور العدد المركب على شكل ارجاند.

أهداف الدرس:

- يتعرف نظرية ديموافر لأس صحيح موجب.
- يتعرف نظرية ديموافر لأس نسبى موجب
- يوجد جذور العدد المركب
- يمثل جذور العدد المركب علي شكل ارجاند

المواد التعليمية المستخدمة :

آلة حاسبة علمية

طرق التدريس المقترحة

العرض المباشر، المناقشة والحوار ، العصف الطهنى ، حل المشكلات، الاكتشاف .

مكان التدريس :

الفصل الدراسى

مصادر التعلم :

كتاب الطالب من ص (٥٠) إلى ص (٥٤)
الشبكة الدولية للمعلومات (الانترنت)

التهيئة :

- ناقش مع طلابك بند " فكر وناقش" حول إيجاد مقياس العدد $ع^{٢}$ وكذلك سعته الأساسية.

الوحدة الثانية

٢ - ٢ نظرية ديموافر

De Moivres theorem

سوف تتعلم

- نظرية ديموافر لأس صحيح موجب.
- نظرية ديموافر لأس نسبي موجب.
- جذور العدد المركب.
- تمثيل جذور العدد المركب على شكل أرجاند.

مصطلحات أساسية

- نظرية ديموافر *demoivres thearem*
- جذر *root*

فكر و ناقش

أ) إذا كان ع عددًا مركبًا مقياسه ل، وسعته الأساسية θ فأوجد:
١) مقياس العدد $ع^{٣}$ ٢) سعة العدد $ع^{٣}$

ب) إذا كان ع عددًا مركبًا، وكان السعة الأساسية للعدد $ع^{٣}$ هي θ فإن السعة الأساسية للعدد ع هي ....

تعلم

نظرية ديموافر بأس صحيح موجب

إذا كان ن عددًا صحيحًا موجبًا

فإن (جتا θ + ت جا θ)^{ن} = جتا نθ + جا نθ

مثال

١) عبر عن جتا ٣θ بدلالة قوى جتا θ

الحل

∵ (جتا θ + ت جا θ)^{٣} = جتا ٣θ + ت جا ٣θ (١) نظرية ديموافر.

أيضًا (جتا θ + ت جا θ)^{٣} = جتا$^{٣}\theta$ + ٣ق$_{١}$ جتا$^{٢}\theta$ (ت جا θ).

+ ٣ق$_{٢}$ جتا θ (ت جا θ)^{٢} + (ت جا θ)^{٣} (نظرية ذات الحدين).

= جتا$^{٣}\theta$ + ٣ ت جتا$^{٢}\theta$ جا θ - ٣ جتا θ جا$^{٢}\theta$ - ت جا$^{٣}\theta$ (٢)

من (١) ، (٢) بمساواة الجزء الحقيقي.

∵ جا$^{٢}\theta$ + جتا$^{٢}\theta$ = ١ ∴ جا$^{٢}\theta$ = ١- جتا$^{٢}\theta$

∴ جتا$^{٣}\theta$ = جتا$^{٣}\theta$ - ٣ جتا θ جا$^{٢}\theta$

= جتا$^{٣}\theta$ - ٣ جتا θ (١- جتا$^{٢}\theta$)

= جتا$^{٣}\theta$ - ٣ جتا θ + ٣ جتا$^{٣}\theta$

= ٤ جتا$^{٣}\theta$ - ٣ جتا θ.

حاول أن تحل

١) عبر عن جا ٣θ بدلالة قوى جا θ

٥٠ الصف الثالث الثانوى - كتاب الطالب

في بند تعلم:

ملاحظة هامة:

نعلم إذا كانθ سعة عدد مركب فإن كلا من الأعداد θ + ٢ ر π (حيث ر عدد صحيح) هى سعة لنفس العدد.

لأن جتا θ+ ت جاθ = جتا (θ + ٢ ر π) + ت جا (θ + ٢ ر π)

فإذا كانت ن عدد صحيح (موجب أو سالب) فإن:

(جتا θ+ ت جاθ)

= [جتا (θ + ٢ ر π) + ت جا (θ + ٢ ر π]^{ن}

= جتان (θ + ٢ ر π + ت جا (θ+٢ر π)

= جتا (ن θ+ ٢ ن ر π) + ت جا (نθ + ٢ ن ر π)

حسب نظرية ديموافر

= جتا نθ + ت جا نθ ر ∈ص

- إذا كانت ن عدد صحيح فإن المقدار (جتاθ + ت جاθ)^{ن} له قيمة وحيدة هى (جتا ن θ+ ت جا نθ) لجميع ر ∈ص

نظرية ديموافر بأس نسبى موجب

نعلم أن جتا θ + ت جا θ = جتا (θ + ٢ر π) + ت جا (θ + ٢ر π)؛ حيث ر عدد صحيح.

فإذا كان ك عددًا موجبًا فإن (جتاθ + ت جا θ)$^{\frac{١}{ك}}$ = جتا $\frac{\theta + ٢ر\pi}{ك}$ + ت جا $\frac{\theta + ٢ر\pi}{ك}$

أي إن مقدار (جتاθ + ت جا θ)$^{\frac{١}{ك}}$ يأخذ قيمًا متعددة تبعًا لقيم ر، ويكون عدد هذه القيم المختلفة يساوى ك من القيم، التي نحصل عليها بوضع قيم ر= ...، -٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ .... التي تجعل السعة $\frac{\theta + ٢ر\pi}{ك}$ محصورة بين -π، π

مثال

(٢) أوجد في ك مجموعة حل المعادلة ع^٤ = -١ - $\sqrt{٣}$ ت

الحل

نُحوِّل العدد -١ - $\sqrt{٣}$ ت إلى الصورة المثلثية   س = -١ ، ص = - $\sqrt{٣}$

∴ العدد -١ - $\sqrt{٣}$ ت   يقع في الربع الرابع

ك = $\sqrt{س^٢+ص^٢}$ = $\sqrt{١^٢+(-\sqrt{٣})^٢}$ = ٢

θ = - ظا$^{-١}$ ($\frac{\sqrt{٣}}{١}$) = - $\frac{٢}{٣}\pi$ ∴ ع^٤ = ٢(جتا (- $\frac{٢}{٣}\pi$) + ت جا (- $\frac{٢}{٣}\pi$))

ع = ٢$^{\frac{١}{٤}}$ (جتا - $\frac{٢}{٣}\pi$) + ت جا - ($\frac{٢}{٣}\pi$)$^{\frac{١}{٤}}$

$\sqrt[٤]{٢}$ [جتا $\frac{١}{٤}$ (- $\frac{٢}{٣}\pi$ + ٢رπ) + ت جا $\frac{١}{٤}$(- $\frac{٢}{٣}\pi$ + ٢رπ)]

عندما ر = ٠ **فإن** ع$_١$ = $\sqrt[٤]{٢}$ (جتا $\frac{-١}{٦}\pi$ + ت جا $\frac{-١}{٦}\pi$) = $\sqrt[٤]{٢}$ هـ$^{-\frac{١}{٦}\pi ت}$

عندما ر = ١ **فإن** ع$_٢$ = $\sqrt[٤]{٢}$ (جتا $\frac{١}{٣}\pi$ + ت جا $\frac{١}{٣}\pi$) = $\sqrt[٤]{٢}$ هـ$^{\frac{١}{٣}\pi ت}$

عندما ر = -١ **فإن** ع$_٣$ = $\sqrt[٤]{٢}$ (جتا $\frac{-٢}{٣}\pi$ + ت جا $\frac{-٢}{٣}\pi$) = $\sqrt[٤]{٢}$ هـ$^{-\frac{٢}{٣}\pi ت}$

عندما ر = ٢ **فإن** ع$_٤$ = $\sqrt[٤]{٢}$ (جتا $\frac{٥}{٦}\pi$ + ت جا $\frac{٥}{٦}\pi$) = $\sqrt[٤]{٢}$ هـ$^{\frac{٥}{٦}\pi ت}$

∴ مجموعة الحل = { $\sqrt[٤]{٢}$ هـ$^{-\frac{١}{٦}\pi ت}$ ، $\sqrt[٤]{٢}$ هـ$^{\frac{١}{٣}\pi ت}$ ، $\sqrt[٤]{٢}$ هـ$^{-\frac{٢}{٣}\pi ت}$ ، $\sqrt[٤]{٢}$ هـ$^{\frac{٥}{٦}\pi ت}$ }

حاول أن تحل

(٢) أوجد في ك مجموعة حل المعادلة ع^٤ = ٢ + ٢ $\sqrt{٣}$ ت

مثال

(٣) أوجد جذور المعادلة ع^٣ = ١، ومَثِّل الجذور على مستوى أرجاند.

الحل

ع^٣ = ١

= جتا٠° + ت جا٠°

∴ ع = (جتا٠° + ت جا٠°)$^{\frac{١}{٣}}$

التقييم المستمر: الحوار والمناقشة

¤ ناقش مع طلابك بند حاول أن تحل وتوصل معهم للإجابات الصحيحة

(١) ع = جتا هـ + ت جا هـ

ع^٣ = جتا ٣ هـ + ث جا ٣ هـ

(جتا هـ + ت جا هـ)^٣ = جتا ٣ هـ + ت جا ٣ هـ

جتا ^{٣} هـ + ^{٣}ق$_١$ ت جا هـ جتا ^{٢} هـ + ^{٣}ق$_٢$ ت^٢ جا^٢ هـ جتا هـ + (ت جا هـ^٣)

= جتا ٣ هـ + ت جا ٣ هـ

جتا ٣ هـ + ٣ ت جا هـ جتا٢ هـ + (٣٠ جا٢ هـ جتا هـ - ت جا٣ هـ

= جتا ٣ هـ + ت جا ٣ هـ

جا ^{٣} هـ = ٣ جاهـ جتا^٢ هـ - جا ^{٣} هـ

(٢) ع = ٤ (جتا $\frac{\pi}{٣}$ + ت جا $\frac{\pi}{٣}$)

$\sqrt[٤]{ع}$ = $\sqrt[٤]{٤}$ (جتا $\frac{\frac{\pi}{٣} + ٢ر\pi}{٤}$ + ت جا $\frac{\frac{\pi}{٣} + ٢ر\pi}{٤}$

ع$_١$ = $\sqrt[٤]{٤}$ (جتا $\frac{٧\pi}{١٢}$ + ت جا $\frac{٧\pi}{١٢}$)

ع$_٢$ = $\sqrt[٤]{٤}$ (جتا $\frac{٧\pi}{١٢}$ + ت جا $\frac{٧\pi}{١٢}$)

ع$_٣$ = $\frac{\pi}{١٢}$ (جتا $\frac{٣\pi}{١٢}$ + ت جا $\frac{١٣\pi}{١٢}$)

ع$_٤$ = $\sqrt[٤]{٤}$ (جتا $\frac{١٩\pi}{١٢}$ + ت جا $\frac{١٩\pi}{١٢}$)

نلاحظ أن:

المقدار (جتا ٥٠° + ت جا ٥٠°)$^{\frac{١}{٥}}$ له خمس قيم تحصل عليها بالتعويض فى المقدار:

(جتا $\frac{٥٠° + ٢ر \pi}{٥}$ + ت جا $\frac{٥٠ + ٢ر \pi}{٥}$)

عن ر = ٠، ١، ٢، ٣، ٤

أى بالتعويض في المقدار

(جتا$\frac{٥٠° + ٣٦٠ر}{٥}$ + ت جا($\frac{٥٠ + ٣٦٠ر}{٥}$)

عن ر = ٠، ١، ٢، ٣، ٤ وهى

(جتا ١٠° + ت جا ١٠) ، (جتا ٨٢° + ت جا ٨٢°)

(جتا ١٥٤° + ت جا ١٥٤°) ، (جتا ٢٢٦ + ت جا ٢٢٦)

(جتا ٢٩٨° + ت جا ٢٩٨°)

تمارين إضافية للمعلم:

١ استخدم نظرية ديموافر للتعبير عن كل من:

جتا ٢θ ، جا ٢θ بدلالة جا θ ، جتا θ

الحل:

جتا ٢θ + ت جا ٢ θ = (جتا θ + ت جا θ)^٢

جتا ٢θ + ت جا ٢ θ = جتا^٢ θ - جا ^{٢}θ + ٢ جا θ جتاθ

من خواص الأعداد المركبة ينتج أن

جتا^٢ θ = جتا ^{٢} θ- جا ^{٢} θ،

جا ^{٢} θ = ٢ جاθ جتا θ

٢ استخدم نظرية ديموافر فى التعبير عن كل من :

أ جتا ٣θ

ب جا ٣ θ بدلالة جا θ، جتا θ.

تعلم:

عند تمثيل جدور المعادلة $ع^٣ = ١$ على مستوى ارجاند وضح للطلاب أن عند $ع^٣ = ١$ فإن:

$$ع^٣ = جتا ٠° + ت جا ٠°$$

وبالتالي فإن

$$ع = (جتا ٠ + ت جا ٠)^{\frac{١}{٣}}$$

$$\therefore\ ع = جتا \frac{١}{٣}((٢ ر \pi + ت جا (\frac{١}{٣})(٢ر\pi))$$

وبالتعويض

ر = ٠ $ع_١ = ١$

ر = ١ $ع_٢ = هـ^{\frac{٢\pi}{٣}} ت$

ر = -١ $ع_٣ = هـ^{\frac{-٢\pi}{٣}} ت$

⌑ استرشد بالشكل الموجود فى ص (٥٢) لتبين للطلاب أن الجذور الموضحة علي الشكل ارجاند تقسم الدائرة التى مركزها نقطة الأصل، وطول نصف قطرها إلى ٣ أقواس متساوية وقياس كل منها ١٢٠°

التقييم المستمر :الحوار والمناقشة

⌑ ناقش مع طلابك بند حاول أن تحل وتوصل معهم للإجابات الصحيحة:

(٣) $ع^٤ = ١$

$ع^٤ = ١$ (جتا صفر + ت جا صفر)

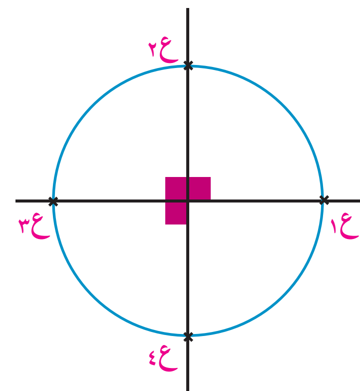
$ع = ١ (جتا \frac{٢\pi ر}{٤} + ت جا \frac{٢\pi ر}{٤})$

$ع_١ =$ (جتا صفر + ت جا صفر)

$ع_٢ = (جتا \frac{\pi}{٢} + ت جا \pi)$

$ع_٣ = (جتا \pi + ت جا \pi)$

$ع_٤ = (جتا \frac{-\pi}{٢} + ت جا \frac{-\pi}{٢})$



$= جتا \frac{١}{٣} (٢ر\pi) + ت جا \frac{١}{٣} (٢ر\pi)$

عندما ر = ٠ فإن $ع_١ =$ جتا ٠° + ٣ جا ٠° = ١

عندما ر = ١ فإن $ع_٢ = جتا \frac{٢\pi}{٣} + ت جا \frac{٢\pi}{٣} = هـ^{\frac{٢\pi}{٣}} ت$

عندما ر = -١ فإن $ع_٣ = جتا \frac{-٢\pi}{٣} + ت جا \frac{-٢\pi}{٣} = هـ^{\frac{-٢\pi}{٣}} ت$

نلاحظ أن الجذور تقسم الدائرة التي مركزها نقطة الأصل، وطول نصف قطرها الوحدة إلى ٣ أقواس متساوية، وقياس كل منها ١٢٠°(إحداثيات النقط تكون رؤوس مثلث متساوى الأضلاع).

حاول أن تحل

(٣) أوجد جذور المعادلة $ع^٤ = ١$ ومثل الجذور على مستوى أرجاند.

الجذور النونية

المعادلة $س^ن = أ$ حيث أ عدد مركب يكون لها ن من الجذور على الصورة $س = أ^{\frac{١}{ن}}$.

يمكن حسابها بإيجاد الصورة المثلثية للعدد أ ثم تطبيق نظرية ديموافر، وتقع الجذور جميعًا في مستوى أرجاند على دائرة واحدة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها $|أ|^{\frac{١}{ن}}$. وتكون مضلعًا منتظمًا، عدد رؤوسه ن.

مثال (الجذور الخماسية للعدد - ٣٢)

(٤) مثل على شكل أرجاند الجذور الخماسية للعدد - ٣٢

الحل

الجذور الخماسية للعدد - ٣٢ هي حلول المعادلة $ع^٥ = -٣٢$

وبتحويل العدد - ٣٢ إلى الصورة المثلثية.

$\therefore ع^٥ = ٣٢ (جتا \pi + ت جا \pi)$

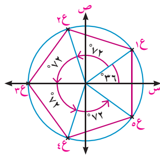
$\therefore ع = ٣٢^{\frac{١}{٥}} (جتا \pi + ت جا \pi)^{\frac{١}{٥}}$

$= ٢ (جتا \frac{١}{٥} (\pi + ٢ر\pi) + ت جا \frac{١}{٥} (\pi + ٢ر\pi))$.

نوجد الجذر الأول وذلك بوضع ر = صفر

$\therefore ع = ٢ (جتا \frac{\pi}{٥} + ت جا \frac{\pi}{٥}) = ٢ (جتا ٣٦° + ت جا ٣٦°)$

وتكون قياس الزاوية بين كل جذر والذي يليه هي $\frac{٣٦٠}{٥} = ٧٢°$



$ع_٢ = ٢ ((جتا ٣٦° + ٧٢°) + ت جا (٣٦° + ٧٢°)) = ٢ (جتا ١٠٨° + ت جا ١٠٨°)$

$ع_٣ = ٢ ((جتا ٣٦° + ٧٢°) + ت جا (٣٦° + ٢ \times ٧٢°)) = ٢ (جتا ١٨٠° + ت جا ١٨٠°)$

$ع_٤ = ٢ ((جتا ٣٦° + ٣\times٧٢°) + ت جا (٣٦° + ٣ \times ٧٢°)) = ٢ (جتا ٢٥٢° + ت جا ٢٥٢°)$

$= ٢ (جتا (-١٠٨°) + ت جا (-١٠٨°))$

الجذور النونية:

⌑ وضح لطلابك أنه إذا كان $س^ن = أ$ حيث أ عدد مركب فإن الجذور تكون علي الصورة $س = أ^{\frac{١}{ن}}$.

يمكن حساب الجذر النونى بالخطوات التالية:

- إيجاد الصورة المثلثية للعدد أ
- تطبيق نظرية ديموافر
- تقع الجذور علي مستوى ارجاند علي دائرة واحدة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها $|أ|^{\frac{١}{ن}}$.

⌑ اعط طلابك مثال ص (٥٢) لتوضيح كيفية إيجاد الجذور النونية وهى فى المثال الجذور الخماسية للعدد (-٣٢)

⌑ استرشد بالشكل الموضح لبيان الجذور علي مستوى ارجاند

الإجابة

$\text{جتا}\frac{\pi}{٨} = \frac{\sqrt{٢+\sqrt{٢}}}{٢}$

$\text{جا}\frac{\pi}{٨} = \frac{\sqrt{٢-\sqrt{٢}}}{٢}$

$\text{ظا}\frac{\pi}{٨} = \sqrt{٢} - ١$

التقييم المستمر: الحوار والمناقشة

⌑ ناقش مع طلابك بند حاول أن تحل وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة

حاول أن تحل

④ سداسي منتظم

$\text{ع} = ٧ - ٢٤\,\text{ت}$

$= \sqrt{٧ - ٢٤\,\text{ت}} = \sqrt{١٦ - ٢٤\,\text{ت} + ٩\,\text{ت}^٢}$

$= \sqrt{(٤ - ٣\,\text{ت})^٢}$

$= \pm(٤ - ٣\,\text{ت})$

نظرية ديموافر ٢ - ٢

$\text{ع}_٥ = ٢\left(\left(\text{جتا}\,٣٦° + ٤\times٧٢°\right) + \text{ت جا}\left(٣٦° + ٤\times٧٢°\right)\right) = ٢\left(\text{جتا}\,٣٢٤° + \text{ت جا}\,٣٢٤°\right)$

$= ٢\left(\text{جتا}\,-٣٦° + \text{ت جا}\,-٣٦°\right)$

حاول أن تحل

④ مثِّل على شكل أرجاند الجذور السداسية للعدد ١

مثال

⑤ أوجد الجذور التربيعية للعدد ٣+ ٤ ت

الحل

نفرض أن $(٣+٤\text{ت})^{\frac{١}{٢}} = \text{س} + \text{ص ت}$ بتربيع الطرفين

$\therefore ٣ + ٤\text{ت} = \text{س}^٢ - \text{ص}^٢ + ٢\,\text{س ص ت}$

بمساواة الجزء الحقيقي بالجزء الحقيقي والجزء التخيلي بالجزء التخيلي

$\therefore \text{س}^٢ - \text{ص}^٢ = ٣ \longrightarrow (١)$ ، $٢\,\text{س ص} = ٤ \longrightarrow (٢)$ بتربيع (١) ، (٢) والجمع

$\therefore \text{س}^٤ - ٢\,\text{س}^٢\text{ص}^٢ + \text{ص}^٤ + ٤\text{س}^٢\text{ص}^٢ = ٩ + ١٦$ $\therefore \text{س}^٤ + ٢\text{س}^٢\text{ص}^٢ + \text{ص}^٤ = ٢٥$

$\therefore (\text{س}^٢ + \text{ص}^٢)^٢ = ٢٥$ $\therefore (\text{س}^٢ + \text{ص}^٢) = ٥ \longrightarrow (٣)$

بجمع (١)، (٢) $\longrightarrow ٢\,\text{س}^٢ = ٨$ ومنها $\text{س} = \pm ٢$ عند $\text{س} = ٢$ بالتعويض في (٢) $\longrightarrow \text{ص} = ١$

$\therefore$ الجذر الأول $= ٢ + \text{ت}$ $\therefore$ الجذر الثاني $= -٢ - \text{ت}$

حاول أن تحل

⑤ أوجد على الصورة المثلثية الجذرين التربيعين للعدد $\frac{١}{\sqrt{٢}}(١ + \text{ت})$

مثال

⑥ أوجد في ك مجموعة حل المعادلة $(١ - \text{ت})\,\text{س}^٢ - (٣ - \text{ت})\,\text{س} + ٤ - ٢\,\text{ت} = ٠$

الحل

يمكن وضع المعادلة على الصورة:

$\text{س}^٢ - \frac{٣ - \text{ت}}{١ - \text{ت}}\,\text{س} + \frac{٤ - ٢\text{ت}}{١ - \text{ت}} = \text{صفر}$

$\because \frac{٣ - \text{ت}}{١ - \text{ت}} = \frac{(٣ - \text{ت})(١ + \text{ت})}{(١ - \text{ت})(١ + \text{ت})} = \frac{٣ + ٢\text{ت} + ١}{١ + ١} = \frac{٤ + ٢\text{ت}}{٢} = ٢ + \text{ت}$

$\because \frac{٤ - ٢\text{ت}}{١ - \text{ت}} = \frac{(٤ - ٢\text{ت})(١ + \text{ت})}{(١ - \text{ت})(١ + \text{ت})} = \frac{٤ + ٢\text{ت} + ٢}{١+١} = \frac{٦ + ٢\text{ت}}{٢} = ٣ + \text{ت}$

المعادلة في أبسط صورة هي $\text{س}^٢ - (٢ + \text{ت})\,\text{س} + ٣ + \text{ت} = ٠$

وباستخدام القانون العام لحل المعادلة التربيعية

$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^٢ - ٤\text{أجـ}}}{٢\text{أ}}$

$= \frac{(٢ + \text{ت}) \pm \sqrt{(٢ + \text{ت})^٢ - ٤(٣ + \text{ت})}}{٢} = \frac{(٢ + \text{ت}) \pm \sqrt{(٤ + ٤\text{ت}) - ١ - ١٢ - ٤\text{ت}}}{٢}$

كتاب الجبر والهندسة الفراغية - الجبر ٥٣

⑤ $\text{س} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، $\text{ص} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

$\therefore |\text{ع}| = \sqrt{\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}} = ١$

$\text{ظا}\theta = ١ \quad \therefore \theta = \text{ظا}^{-١}\,١ = \frac{\pi}{٤}$

$\text{ع} = \left(\text{جتا}\frac{\pi}{٤} + \text{ت جا}\frac{\pi}{٤}\right)$

الجذران التربيعيان هما:

$\text{ع} = \left(\text{جتا}\frac{\pi}{٤} + \text{ت جا}\frac{\pi}{٤}\right)^{\frac{١}{٢}}$

$= \left(\text{جتا}\frac{\frac{\pi}{٤} + ٢\text{ر}\pi}{٣} + \text{ت جا}\frac{\frac{\pi}{٤} + ٢\text{ر}\pi}{٣}\right)$

ر = ٠ ، ر = ١

عند ر = ٠ الجذر الأول = $\left(\text{جتا}\frac{\pi}{٨} + \text{ت جا}\frac{\pi}{٨}\right)$ عند ر = ١

الجذر الثاني = $\left(\text{جتا}\frac{٩\pi}{٨} + \text{ت جا}\frac{٩\pi}{٤}\right)$

⌑ ناقش طلابك هل بالإمكان حساب كل من :

$\text{جتا}\frac{\pi}{٨}$ ، $\text{جا}\frac{\pi}{٢}$ ، $\text{ظا}\frac{\pi}{٨}$

٦ حاول أن تحل ص ٦٠

س^{٢} + (١ + ت) س - ٦ + ٣ ت = صفر

س = $\frac{-(١+ت) \pm \sqrt{(١+ت)^{٢} - ٤ \times ١ \times (-٦+٣ت)}}{٢}$ =

س = $\frac{-(١+ت) \pm \sqrt{٢ت + ٢٤ - ١٢ت}}{٢}$

س = $\frac{-(١+ت) \pm \sqrt{٢٤ - ١٠ت}}{٢}$

س = $\frac{١(١+ت) \pm (٥ - ت)}{٢}$

س$_{١}$ = $\frac{-١ - ت + ٥ - ت}{٢}$ ، س$_{٢}$ = $\frac{-١ - ت - ٥ + ت}{٢}$

س$_{١}$ = ٢ - ت ، س$_{٢}$ = -٣

∴ مجموعة الحل = {٢ - ت ، -٣}

تمارين إضافية للمعلم:

١ إذا كان (س + ت ص)^{٢} (١ + ٢ ت) = ١١ + ٢ ت

فأوجد قيم س^{٢} ص الحقيقية

الحل:

∵ (س + ت ص)^{٢} (١ + ٢ ت) = ١١ + ٢ ت

∴ (س + ت ص)^{٢} = $\frac{١١ + ٢ت}{١ + ٢ت}$

∴ (س + ت ص)^{٢} = $\frac{(١١ + ٢ت)(١ - ٢ت)}{(١ + ٢ت)(١ - ٢ت)}$

= $\frac{١٥ - ٢٠ت}{٥}$

(س + ت ص)^{٢} = ٣ - ٤ ت

∴ س^{٢} - ص^{٢} + ٢ س ص ت = ٣ - ٤ ت

∴ س^{٢} - ص^{٢} = ٣ (١)

٢ س ص = -٤ (٢)

بتربيع (١) ، (٢) والجمع

∴ (س^{٢} + ص^{٢})^{٢} = ٢٥

س^{٢} + ص^{٢} = ٥ (٣)

بجمع (١) ، (٣)

٢س^{٢} = ٨ س^{٢} = ٤ س = ±٢

بطرح (١) من (٣)

∴ ٢ص^{٢} = ٢ ص^{٢} = ١ ص = ±١

من (٢)

∵ س ص $<$ ٠ ∴ س ، ص مختلفتان فى الاشارة

∴ س = ٢ ، ص = -١ أو س = -٢ ، ص = ١

الوحدة الثانية: الأعداد المركبة

= $\frac{(٢+ت) \pm \sqrt{-٩}}{٢}$ = $\frac{(٢+ت) \pm ٣ت}{٢}$

الجذر الأول = $\frac{٢ + ت + ٣ت}{٢}$ = ١ + ٢ت الجذر الأول = $\frac{٢ + ت - ٣ت}{٢}$ = ١ - ت

∴ مجموعة الحل = {١ + ٢ت ، ١ - ت}

حاول أن تحل

٦ أوجد في ك مجموعة حل المعادلة س^{٢} + (١ + ت) س - ٦ + ٣ت = ٠

تمارين (٢ - ٢)

١ باستخدام نظرية ديموافر أثبت صحة المتطابقات الآتية:

أ جتا ٤θ = ٨ جتا^{٤} θ - ٨جتا^{٢}θ + ١ ب جا ٥θ = ١٦ جا^{٥}θ - ٢٠ جا^{٣}θ + ٥ جاθ

٢ أوجد فى ك مجموعة حل كل من المعادلات الآتية؛ اكتب الجذور على صورة س + ص ت:

أ ع^{٤} = ١٦ ب ع^{٣} + ٨ = ٠ جـ ع^{٣} + ٨ ت = ٠

٣ أوجد مجموعة حل المعادلة ع^{٥} + ٢٤٣ = ٠ حيث ع ∋ ك

٤ أوجد مجموعة حل المعادلة ع^{٤} = ٢ + ٢$\sqrt{٣}$ ت . اكتب الحل على الصورة الأسية.

٥ أوجد الجذور التربيعية لكل من:

أ ٢ - ٢$\sqrt{٣}$ ت ب ١ - ت جـ ٨ ت

د ٣ + ٤ ت هـ ٥ - ١٢ ت

٦ أوجد الجذور التكعيبية للعدد ٨ ومثل هذه الجذور على شكل أرجاند.

٧ أوجد الجذور الرابعة للعدد - ١ ومثل هذه الجذور على شكل أرجاند.

٨ أوجد القيم المختلفة للعدد ع = (٢$\sqrt{٢}$ - ٢$\sqrt{٦}$)$^{\frac{٣}{٢}}$

٩ إذا كان $\frac{٧ - ٤ت}{٢ + ت}$ = أ + ب ت، أوجد قيم المقدار (-ب + ٢ أ ت)$^{\frac{٣}{٢}}$

١٠ ضع العدد ٢$\sqrt{٢}$ (١ + ت) على الصورة المثلثية، ثم أوجد جذوره التربيعية على الصورة الأسية.

١١ إذا كان س = ٨ - ٦ ت أوجد س$^{\frac{٣}{٢}}$ على الصورة الجبرية.

١٢ تفكير إبداعى: أثبت أن جتا^{٤} θ = $\frac{١}{٨}$ (جتا ٤θ + ٤ جتا ٢ θ + ٣)

٥٤ الصف الثالث الثانوى - كتاب الطالب

تمارين ٢ - ١

٥ الجذور التربيعية للعدد ٣ + ٤ ت

$\sqrt{٤ + ٤ت + ت^{٢}}$ = $\sqrt{(٢+ت)^{٢}}$ = ±(٢ + ت)

٦ ع = ٨ = ٨ (جتا ٠ + ت جا ٠)

$\sqrt[٣]{ع}$ = ٢ (جتا $\frac{٠ + ٢\pi ر}{٣}$ + ت جا $\frac{٠ + ٢\pi ر}{٣}$)

ع$_{١}$ = ٢ (جتا ٠ + ت جا ٠)

ع$_{٢}$ = ٢ (جتا ١٢٠ + ت جا ١٢)

ع$_{٣}$ = ٢ (جتا ٢٤٠ + ت جا ٢٤٠)

١٢ أ = ١ ، ب = (٢ - ت) ، جـ = ٣ - ب

ع = $\frac{-٢ + ت \pm \sqrt{(٢ - ت)^{٢} - ٤ \times ١ (٣ - ت)}}{٢}$

ع = $\frac{-٢ + ت \pm \sqrt{(٢ - ت)^{٢} - ٣ \times ١ \times (٣ - ت)}}{٢}$

ع = $\frac{-٢ + ت \pm \sqrt{-٩}}{٢}$

ع = $\frac{-٢ + ت \pm ٣ت}{٢}$

ع$_{١}$ = $\frac{-٢ + ٤ت}{٢}$ ، ع$_{٢}$ = $\frac{-٢ - ٢ت}{٢}$

= -١ + ٢ ت ع$_{٢}$ = -١ - ت

الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

Cubic root of unity

الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

Cubic roots of unity

سوف تتعلم

- الجذور التكعيبية للواحد الصحيح.
- خواص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح.
- تمثيل الجذور التكعيبية للواحد هندسيًّا
- مرافق الأعداد $أ + \omega$ ، $أ ت + \omega$

مصطلحات أساسية

- جذر *Root*
- جذر تربيعي *Square root*
- جذر تكعيبي *Cubic root*
- دائرة الوحدة *Unit circle*
- مرافق *Conjugate*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية *Scientific calculator*
- برامج رسومية *Graphical programs*

عمل تعاونى :

باستخدام نظرية ديموافر أوجد مجموعة حل المعادلة $ع^٣ = ١$

أوجد الجذور السابقة بالصورة الجبرية.

أوجد مجموعة الجذور الثلاثة . ماذا تلاحظ؟

تعلم

الجذور التكعيبية للواحد الصحيح *Cubic roots of unity*

باستخدام نظرية ديموافر نجد أن: مجموعة حل المعادلة $ع^٣ = ١$ هى:

$١ ، -\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت ، \frac{-١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت.$

أن مربع أحد الجذرين المركبين يساوى الجذر الآخر؛

ولذلك يمكن أن نعرض الجذور التكعيبية على الصورة ١ ، ω، $\omega^٢$

حيث $\omega = -\frac{١}{٢} \pm \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت$ ، $\omega^٢ = -\frac{١}{٢} \mp \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت$

تفكير ناقد:

هل يمكنك إيجاد الجذور التكعيبية للواحد الصحيح باستخدام الصورة الجبرية للعدد المركب؟

تذكر أن

$\sum_{ر = صفر}^{\omega} \omega^ر = ١$

$= ٠$

خواص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح:

إذا كانت ١ ، ω ، $\omega^٢$ هى الجذور التكعيبية للواحد الصحيح فإن

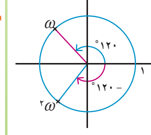
١- $١ + \omega + \omega^٢ =$ صفر (مجموع الجذور = صفر)

$(١ + \omega = -\omega^٢ ، ١ + \omega^٢ = -\omega ، \omega + \omega^٢ = -١)$

٢- $\omega^٣ = ١$

$(\omega^٢ = \frac{١}{\omega} ، \omega = \frac{١}{\omega^٢})$

٣- الجذور التكعيبية للواحد الصحيح تقع على دائرة مركزها نقطة الأصل وحول نصف قطرها ١ وتكون رؤوس مثلث متساوى الأضلاع.



خلفية:

سبق وأن درس الطالب الأعداد المركبة والصورة المثلثية للعدد المركب ، كما درس نظرية ديموافر و إيجاد جذور العدد المركب وتمثيله على مستوى أرجاند وسوف نتناول فى هذا الدرس معرفة الجذور التكعيبية للواحد الصحيح.

أهداف الدرس:

- يوجد الجذور التكعيبية للواحد الصحيح .
- يتعرف خواص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح.
- يمثل الجذور التكعيبية للواحد الصحيح هندسيًا.
- يوجد مرافق الأعداد $أ + \omega$ ، $أ ت + \omega$.

المواد التعليمية المستخدمة

آلة حاسبة علمية

طرق التدريس المقترحة :

العرض المباشر ، المناقشة والحوار ، العصف الذهنى ، حل المشكلات ، الاكتشاف .

مصادر التعلم :

كتاب الطالب من ص (٥٥) إلى ص (٥٨)

الشبكة الدولية (الإنترنت)

مكان التدريس :

الفصل الدراسى

التهيئة

- استرجع مع الطلاب نظرية ديموافر وقسم الطلاب إلى مجموعات واطلب من كل مجموعة إيجاد مجموعة حل المعادلة $ع^٣ = ١$ وذكرهم أنهم قاموا بحل هذه المعادلة فى الدرس السابق .
- ناقش الطلاب فى الإجابات التى توصلوا اليها.

إجراءات الدرس :

فى بند تعلم وضح للطلاب أن

$\because$ الصورة المثلثية للواحد هى (جتا ٠ + ت جا ٠)

$\therefore$ $(١)^{\frac{١}{٣}} =$ (جتا ٠ + ت جا ٠)$^{\frac{١}{٣}}$.

$\therefore$ $(١)^{\frac{١}{٣}} =$ جتا $\frac{٢ ر \pi}{٣}$ + ت جا $\frac{٢ ر \pi}{٣}$ حيث ر = ٠ ، ١ ، ٢

$\therefore$ **نستنتج أن:**

الصورة المثلثية للجذور التكعيبية للواحد الصحيح هى :

(جتا٠ + جا٠)، (جتا $\frac{٢\pi}{٣}$ + ت جا $\frac{٢\pi}{٣}$)، (جتا $\frac{٤\pi}{٣}$ + ت جا $\frac{٤\pi}{٣}$)

وتكون الصورة الجبرية للجذور التعكيبية للواحد الصحيح هى:

$١ ، \frac{-١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت ، -\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت$

خواص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح :

معلومات اضافية للمعلم:

١ مجموع الجذور التكعيبية للواحد الصحيح = ٠

أي أن: $١ + \omega + \omega^٢ = ٠$

البرهان :

$$١ + (\frac{-١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت) + (\frac{-١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت)$$

$$= ١ - \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت - \frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت = ٠$$

٢ حاصل ضرب الجذرين التكعيبين التخيليه للواحد الصحيح = ١

أى أن: $\omega^٢ = ١$

البرهان:

$$\because (جتا \frac{٢\pi}{٣} + ت جا \frac{٢\pi}{٣})(جتا \frac{٤ط}{٣} + ت جا \frac{٤ط}{٣})$$

$$= جتا (\frac{٢\pi}{٣} + \frac{٤\pi}{٣}) + ت جا (\frac{٢\pi}{٣} + \frac{٤\pi}{٣})$$

$$= جتا ٢ + ت جا ٢ = جتا ٠ + ت جا ٠ = ١$$

$$\therefore \omega \times \omega^٢ = ١$$

أى $\omega^٣ = ١$

٣ الجذور التكعيبية للواحد الصحيح تقع علي دائرة مركزها نقطة الأصل وتكون رؤوس مثلث متساوى الأضلاع.

التقييم المستمر: الحوار والمناقشة

⌑ ناقش مع طلابك بند حاول أن تحل وتوصل معهم للإجابات الصحيحة .

حاول أن تحل ص (٥٦)

(١) أ $(٢ + ٥\omega + ٢\omega^٢)^٥ = (٣\omega)^٥ = ٢٤٣ \omega^٢$

ب $(\omega + \frac{١}{\omega})^٢ (\omega^٢ + \frac{١}{\omega^٢})^٣$

$= (-١)^٢ (-١)^٣ = -١$

التقييم المستمر: الحوار والمناقشة

⌑ ناقش طلابك فى بند حاول أن تحل وتوصل معهم للإجابات الصحيحة :

(٢) $(\frac{\omega(\omega^٢ أ + ب + جـ \omega)}{\omega^٢ أ + ب + جـ \omega} - \frac{\omega^٢ (ب + جـ \omega)}{جـ \omega + ب})^٨$

$(\omega - \omega^٢)^٨ = (\pm \sqrt{٣} ت)^٨ = ٨١$

$\frac{١}{٢ + \omega} + \frac{١}{٢ + \omega^٢} = [\frac{٢ + \omega^٢ + ٢ + \omega}{٤ + ٢\omega^٢ + ٢\omega + ١} = \frac{٣}{٣} = ١$

مثال

(١) إذا كانت ١ ، ω ، $\omega^٢$ ، هى الجذور التكعيبية للواحد الصحيح . أوجد قيمة كل من:

أ $٥ + ٥\omega + ٥\omega^٢$ ب $(١ - \frac{٢}{\omega} - \frac{٢}{\omega^٢})(٣ + ٥\omega + ٥\omega^٢)$

الحل

أ المقدار = ٥ ($١ + \omega + \omega^٢$) بأخذ العدد ٥ عامل مشترك

= ٥ × صفر = صفر

ب المقدار = $(١ - \frac{٢}{\omega} - \frac{٢}{\omega^٢})(٣ + ٥\omega + ٥\omega^٢)$ بالتعويض عن $\frac{١}{\omega} = \omega^٢$، $\frac{١}{\omega^٢} = \omega$

$= (١ - ٢\omega^٢ - ٢\omega)(٣ + ٥\omega + ٥\omega^٢) = (١ - ٢(\omega^٢ + \omega))(٣ + ٥(\omega + \omega^٢))$

$= (١ - ٢(-١))(٣ + ٥(-١)) = (١ + ٢)(٣ - ٥) = -٦$

حاول أن تحل

(١) إذا كانت ١ ، ω ، $\omega^٢$ هى الجذور التكعيبية للواحد الصحيح . أوجد قيمة:

أ $(٢ + ٥\omega + ٢\omega^٢)^٥$ ب $(\omega + \frac{١}{\omega})^٢ (\omega^٢ + \frac{١}{\omega^٢})^٣$

مثال

(٢) أثبت أن $\omega^٢ - \omega = \pm \sqrt{٣}$ ت ومن ثم أثبت أن $[\frac{٥ - ٣\omega^٢}{٥\omega - ٣} - \frac{٢ - ٧\omega}{٢\omega^٢ - ٧}]^٤ = ٩$

حل أخر

$\because \omega^٢ = -\frac{١}{٢} \pm \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت ، $\omega = -\frac{١}{٢} \mp \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت

$\therefore \omega^٢ - \omega = (-\frac{١}{٢} \pm \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت) - (-\frac{١}{٢} \mp \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت)$

$= -\frac{١}{٢} \pm \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت + \frac{١}{٢} \pm \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت = \pm \sqrt{٣}$ ت

لاحظ أن

$\omega^٢ + \omega = \pm\sqrt{٣}$ ت يمكن استخدامها فى حل التمارين

الحل الثانى

$\because (\omega^٢ - \omega)^٢ = \omega^٤ - ٢\omega^٢ + \omega^٢$

$= \omega - ٢ + \omega^٢ = (\omega + \omega^٢) - ٢$

$= -١ - ٢ = -٣$ $\therefore \omega^٢ - \omega = \pm \sqrt{-٣} = \pm \sqrt{٣}$ ت

المقدار $= [\frac{٥ - ٣\omega^٢}{٥\omega - ٣} - \frac{٢ - ٧\omega}{٢\omega^٢ - ٧}]^٤ = [\frac{٥\omega^٣ - ٣\omega^٢}{٥\omega - ٣} - \frac{٢\omega^٣ - ٧\omega}{٢\omega^٢ - ٧}]^٤$

$= [\frac{\omega^٢(٥\omega - ٣)}{٥\omega - ٣} - \frac{\omega(٢\omega^٢ - ٧)}{٢\omega^٢ - ٧}]^٤ = [\pm \sqrt{٣} ت]^٤ = ٩$

حاول أن تحل

(٢) أثبت أن $[\frac{أ + ب\omega - جـ\omega^٢}{\omega^٢ أ + ب + جـ} - \frac{جـ + \omega^٢ - ب}{\omega جـ + ب}]^٨ = ٨١$

مثال

(٣) أثبت أن س = $\frac{-١ + \sqrt{-٣}}{٢}$ هو أحد حلول المعادلة س^١٠ + س^٥ + ١ = صفر

الحل

$\because س = \frac{-١ + \sqrt{-٣}}{٢} = \frac{-١ + \sqrt{٣} ت}{٢} = -\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت = \omega$

أى إن س تمثل أحد الجذور المركبة للواحد الصحيح

عندما س = ω فإن $\omega^{١٠} + \omega^٥ + ١ = \omega^١ + \omega^٢ + ١ =$ صفر

حاول أن تحل

(٣) كون المعادلة التربيعية التى جذراها $(١ + \omega - \omega^٢)^٣$ ، $(١ - \omega + \omega^٢)^٣$



إذا كان ١، ω، $\omega^٢$ هى الجذور التكعيبية للواحد الصحيح :

أكمل ما يأتى:

(١) $(٢ + ٥\omega + ٢\omega^٢)^٢ =$ ....

(٢) $(\omega - \omega^٢)^٤ =$ ....

(٣) $(\omega^٢ + \frac{١}{\omega})^٢ (\omega^٢ + \frac{١}{\omega})^٢ =$ ....

(٤) إذا كان س = $\frac{-١ + \sqrt{٣} ت}{٢}$ فإن $س^٨ + س^٤ =$ ....

(٥) $(\frac{١}{\omega + ٢})(١ + \omega - \frac{٣}{\omega}) =$ ....

(٦) $١ + ٣\omega + ٣\omega^٢ =$ ....

(٧) إذا كان أ = $٢\omega - ٣\omega^٢$ ، ب = $٣ + ٥\omega^٢$ فإن أ^٢ + ب^٢ = ...

(٨) $\sum_{ر=١}^{٥} \omega^ر =$ ....

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(٩) مرافق العدد ω يساوى ....

أ ω ب $\omega^٢$ جـ ١ د $\frac{١}{\omega}$

(١٠) $(\omega + \frac{١}{\omega})(١ + \frac{١}{\omega^٢})^٢ =$ ....

أ ٣ ب صفر جـ -٣ د -٥

(١١) $(أ + ب\omega + أ\omega^٢)(أ + ب\omega + أ\omega^٤) =$ ....

أ ١ ب أ - ب جـ (أ - ب)^٢ د ب^٢ - أ^٢

(١٢) $(١ + ٢\omega^٥ + \frac{١}{\omega^٢})(١ + ٢\omega + \frac{١}{\omega^٤}) =$ ....

أ صفر ب ١ جـ -١ د ٢

(١٣) $\frac{أ - ى\omega}{أ\omega^٢ - ى} - \omega^٢ =$ ....

أ ٣ت ب $\pm\sqrt{٣}$ ت جـ -٣ د ٣

١٤ إذا كان $(١ + \omega)^٧ = \text{أ} + \text{ب}\,\omega$ حيث أ ، ب عددان حقيقيان فإن (أ ، ب) = ...

أ $(٠ ، -١)$ ب $(١ ، ١)$ ج $(٠ ، ١)$ د $(١ ، -١)$

١٥ إذا كان $(١ + \omega^٢)^{ن} = (١ + \omega^٢)^{ن}$ فإن أقل قيمة لـ ن الصحيحة هي ....

أ ٢ ب ٣ ج ٥ د ٦

١٦ $١ + \omega + \omega^٢ + \omega^٣ + ... + \omega^{١٠٠} =$ ....

أ صفر ب ١ ج ω د $\omega^٢$

١٧ إذا كان ع = $\omega^{س}$ فإن |ع| = ...

أ ١ ب ω ج س د $\omega^٢$

١٨ $\sum_{ر=١}^{٦} ١ + \omega^{ر} =$ ....

أ صفر ب ٦ ج ١ د $١ + \omega$

١٩ أثبت صحة المتطابقات الآتية:

أ $(١ - \omega + \omega^٢)(١ - \omega^٢ + \omega^٤)(١ - \omega^٤ + \omega^٨)(١ - \omega^٨ + \omega^{١٦}) = ٢^٤$

ب $\left(\frac{\omega}{١ + ٢\omega}\right)^٢ + \left(\frac{١ + ٢\omega^٢}{\omega^٢}\right)^٢ = \frac{-١٠}{٣}\omega^٢$

ج $\left[\frac{١}{١ + \omega\,\text{ت}} - \frac{\omega + \text{ت}}{١ + \omega^٢\text{ت}}\right]^٨ = ١٦$

د $\left[\frac{٥ - ٣\omega^٢}{٥\omega - ٣} - \frac{٢ - ٧\omega}{٢\omega^٢ - ٧}\right]^٢ = -٣$

هـ $(١ + \omega^٢)^٨ = \omega^٢$

و $(١ - \omega + \omega^٢)(١ + \omega^٤ + \omega^٢)^٢ + (١ - \omega^٢ + \omega^٤)^٢ = ٤\omega$

٢٠ أوجد قيمة كل مما يأتى:

$٥ + ٣\omega + ٣\omega^٢$ $(١ + \omega + ٢\omega^٢)^٢ + (١ + ٢\omega + \omega^٢)^٢$

$\frac{\omega^٢(١ - \omega)(١ - \omega^٢)}{(٢\omega + ١)(\omega^٢ + ٢)}$

$= \left[\frac{١}{١ + ٣\omega^٢} - \frac{١}{١ + ٣\omega}\right]^٢$ $\left(١ + \frac{١}{\omega} + \text{ت}\right)\left(١ + \frac{١}{\omega^٢} + \text{ت}\right)$

٢١ إذا كان س = $\frac{-١ + \sqrt{٣}\,\text{ت}}{٢}$ أثبت أن $س^٦ + ١٥س^٥ + ١٥س^٤ + ٢س^٣ + ١٥س^٢ + ٦س$، أوجد الجذور التربيعية للعدد س .

٢٢ إذا كان $\frac{١}{١ + \omega}$ ، $\frac{١}{١ + \omega^٢}$ هما جذرا معادلة تربيعية، فأوجد المعادلة إذا كان ع = $٢(\omega + \text{ت})(\omega^٢ + \text{ت})$ أوجد الصور المختلفة للعدد ع، ثم أوجد الجذرين التربيعيين للعدد ع فى الصورة المثلثية.

٢٣ تفكير إبداعى: أوجد قيم ن التى تجعل $(٢ + ٥\omega + ٢\omega^٢)^{ن} = (٢ + ٢\omega + ٥\omega)^{ن}$ أوجد :

أ $\sum_{ر=صفر}^{١٠} \omega^{ر}$ ب $\sum_{ر=صفر}^{١٠} (١ + \omega^{ر} + \omega^{٢ر})$

لاحظ أن:

(أ) $\omega + \omega^٢ = -١$ ، $١ + \omega = -\omega^٢$

$١ + \omega^٢ = -\omega$

فمثلا

(أ) $٢ + ٣\omega + ٣\omega^٢ = ٢ + ٣(\omega + \omega^٢)$

$= ٢ \times ٣ \times -١$ $= ٢ - ٣ = -١$

(ب) $٥ + ٥\omega + \omega^٢$ $= ٥(١ + \omega) + \omega^٢$

$= ٥ \times -\omega^٢ + \omega^٢$ $= -٥\omega^٢ + \omega^٢$

$= -٤\omega^٢$

(ج) $٣ + ٢\omega - ٣\omega^٢ = -٣(١ + \omega^٢) + ٢\omega$

$= -٣ \times -\omega + ٢\omega$

$= ٣\omega + ٢\omega = ٥\omega$

(د) $(٢ + ٣\omega + ٤\omega^٢)^٢$

$= [٢ + ٣\omega + ٤(-١ - \omega)]^٢ = (٢ + ٣\omega - ٤ - ٤)^٢$

$= (-٢ - \omega)^٢ = ٤ + ٤\omega + \omega^٢ = -٤\omega^٢ + \omega^٢ = -٣\omega^٢$

تمارين إضافية للمعلم

١ إذا كان ١ ، ω ، $\omega^٢$ هى الجذور التكعيبية للواحد الصحيح فأثبت أن:

أ $(١ + \omega)^{١٦} = \omega^٢$

ب $(١ - \omega - \omega^٢)^٣ = ٨$

ج $(١ - \omega)(١ - \omega^٢) = ٣$

د $(١ - ٢ + \omega^٢)(١ + \omega - ٥\omega^٢) = ١٨$

التقييم المستمر: الحوار والمناقشة

- ناقش مع طلابك بند حاول أن تحل وتوصل معهم للإجابات الصحيحة.

٤ $(١ + \omega - \omega^٢)^٣ = (-٢\omega^٢)^٣ = -٨$

$(١ + \omega^٢ - \omega)^٣ = (-٢\omega)^٣ = -٨$

$س^٢ + ١٦ س + ٦٤ =$ صفر

٥ $\frac{٣}{٢ + \omega} \times \frac{٢ + \omega^٢}{٢ + \omega^٢} = \frac{٣(٢ + \omega^٢)}{٤ + ٢\omega^٢ + ٢\omega + ١} = \frac{٣(٢ + \omega^٢)}{٣} = ٢ + \omega^٢$

اجابة بعض تمارين (٢ - ٣)

١ $٩\omega^٢$ ٢ ٩ ٣ ٤ω ٤ -١ ٥ ٦ -٢

٧ ٣٨ ٨ ١٥ω ٩ $\omega^٢$ ١٠ ١١ $(\text{أ} - \text{ب})^٢$

١٩ $٢\omega \times -٢\omega^٢ \times -٢\omega \times -٢\omega^٢ = ٢^٤$

$\left(\frac{\omega}{١ + ٢\omega}\right)^٢ + \left(\frac{١ + ٢\omega^٢}{\omega^٢}\right)^٢ = \frac{-١٠}{٣}\omega^٢$

$\frac{\omega^٢(٥\omega - ٣)}{٥\omega - ٣} - \left(\frac{\omega(٢\omega^٢ - ٧)}{٢\omega^٢ - ٧}\right)^٢$

$(\omega^٢ - \omega)^٢ = (\pm\sqrt{٣}\,\text{ت})^٢ = -٣$

$(١ + \omega^٢)^٨ = (-\omega)^٨ = \omega^٨ = \omega^٢$

$(١ - \omega^٢ + \omega)^٢ + (١ + \omega^٢ + \omega^٤)^٢ = (-٢\omega^٢)^٢ +$ صفر $= ٤\omega^٢$

$\frac{١}{٢ + \omega} + \frac{١}{٢ + \omega^٢} = \frac{٢ + \omega^٢ + ٢ + \omega}{٤ + ٢\omega^٢ + ٢\omega + ١} = \frac{٣}{٣} = ١$

٢٠ $٥ + ٣\omega + ٣\omega^٢ = ٢$

$(١ + \omega + \omega^٢ + \omega^٢)^٢ + (١ + \omega + \omega^٢ + \omega)^٢$

$\omega + \omega^٢ = -١ = \frac{\omega^٢(١ + ١ + ١)}{-٤\omega^٢ + \omega^٢} = -١$

$\left[\frac{١}{١ + ٣\omega^٢} - \frac{١}{١ + ٣\omega}\right]^٢ = \left[\frac{١ + ٣\omega - ١ - ٣\omega^٢}{١ + ٣\omega + ٣\omega^٢ + ٩}\right]^٢$

$= \left[\frac{٣(\pm\sqrt{٣}\,\text{ت})}{٧}\right]^٢ = \frac{-٢٧}{٤٩}$

$(-\omega + \text{ت})(-\omega^٢ + \text{ت})$

$= ١ - \omega\text{ت} - \omega^٢\text{ت} - ١ = \text{ت} = \text{ت}$

الوحدة الثالثة

المحددات والمصفوفات

Matrix

مقدمة الوحدة:

أول من استخدام المصفوفات فى الكتاب الصينى «تسعة كتب فى الحساب» قبيل بداية التاريخ الميلادى، بينما أول من استخدم المحددات كان العالم اليابانى Seki kowa سنة ١٦٨٣م

وتعد المحددات والمصفوفات من الموضوعات الاساسية لأحد فروع الرياضيات وهو الجبر الخطى ومن تطبيقاتها: حل المعادلات الخطية وحل المسائل باستخدام الحاسوب.

وفى هذه الوحدة سوف تتعرف على المحددات وخواصها، المصفوفات وأنواعها والعمليات عليها وكذلك مرتبة المصفوفة وأيضًا نتعرف على كيفية حل معادلات خطية باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة. ومعرفة المعادلات الخطية المتجانسة وغير المتجانسة وتعيين مرتبة المصفوفة للمعاملات ومرتبة مصفوفة المعاملات الموسعة.

وتتكون هذه الوحدة من ثلاثة دروس:

الدرس الأول: المحددات

الدرس الثانى: المصفوفات

الدرس الثالث: حل المعادلات الخطية باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة.

قبل البدء فى دراسة الوحدة اطلب من طلابك قراءة المقدمة الخاصة بالوحدة والتى توضح الكثير من المعلومات عن كيفية نشأه علم المحددات والمصفوفات.

مخرجات التعلم:

فى نهاية الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- سيتعرف المحددات وخواصها.
- يحل مسائل متنوعه مستخدمًا خواص المحددات.
- يتعرف العوامل المرافقه.

أولًا: الجبـــر

الوحدة الثالثة

المحددات والمصفوفات

Determinants and Matrices

مقدمة الوحدة

تعد المصفوفات أحد أهم الأدوات المستخدمة فى كافة فروع الرياضيات، وتعتبر من أهم مفاتيح الجبر الخطى. فالمصفوفات (Matrices) هى مفهوم رياضى يؤدى دورًا مهمًّا فى معظم فروع المعرفة، وكان أول من اكتشف المصفوفات الصينيون القدماء وقد استخدمها العالم كيلى (١٨٩٥ – ١٨٢١) بعد ذلك بشكل منظم، ووضع لها نظمًا على صورة أعمدة وصفوف، وتستعمل المصفوفات فى الوقت الحاضر من قبل المختصين فى علم الاقتصاد وعلم الاجتماع وعلم النفس، هذا فضلًا عن الدور الكبير الذى تلعبه فى الرياضيات وتطبيقاتها الأخرى فى الفيزياء والكيمياء وسائر العلوم التطبيقية. أما المحددات وهى تمثل القيم الحسابية للمصفوفات المربعة فأول من استخدمها فى حل المعادلات الخطية هو العالم اليابانى سيكى كيوى (Sekikowa) سنة ١٦٨٣م، وتم تطوير هذا العلم على يد العلماء فى حل المعادلات الخطية وفى بعض التطبيقات الأخرى فى علوم مختلفة.

أهداف الوحدة

فى نهاية الوحدة، وبعد تنفيذ الأنشطة فيها، يتوقع من الطالب أن:

- يستنتج خواص المحددات.
- يحل مسائل متنوعة مستخدمًا خواص المحددات.
- يعين معكوس مصفوفة مربعة من الرتبة الثالثة باستخدام مصفوفة العوامل المرافقة.
- يحل معادلات خطية باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة.
- يتعرف المعادلات الخطية المتجانسة وغير المتجانسة.
- يعين مرتبة مصفوفة المعاملات ورتبة مصفوفة المعاملات الموسعة.
- يستنتج العلاقة بين مرتبة مصفوفة المعاملات ورتبة مصفوفة المعاملات الموسعة وإمكانية الحل.

٦٤ الصف الثالث الثانوى - كتاب الطالب

- يستنتج المعكوس الضربى لمصفوفه مربعة على نظم ٣ × ٣
- يحل معادلات خطية باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفه.
- يستنتج خواص المحددات.
- يحل مسائل متنوعة مستخدمًا خواص المحددات.
- يتعرف المعادلات المتجانسة وغير المتجانسة.
- يتعرف مرتبة صفوفه المعادلات.
- يدرك العلاقة بين مرتبة مصفوفه المعاملات ومصفوفه المعاملات الموسعه وامكانية الحل.
- يوظف المعادلات المتجانسة وغير المتجانسة فى حل المشكلات الرياضية.

مصطلحات أساسية

- محدد Determinants
- محدد الدرجة الثانية Second – order determinant
- محدد الدرجة الثالثة Third – order determinant
- صف Row
- محدد Column
- المصفوفة Motrix
- العنصر Element
- مرتبة Rank
- مصفوفة صف Row matrix
- مصفوفة عمود Column natrix
- مصفوفة مربعة Square matrix
- مصفوفة صفرية Zero matrices
- مصفوفات متساوية Equal matrices
- مرتبة المصفوفة Rank of a matrix
- مصفوفة موسعة Augmented Matrix
- معادلة متجانسة Homogenuous equation
- معادلة الغير متجانسة Non Homgenuous equation
- المصفوفة الملحقة Adjoint matrix
- مصفوفة المعاملات Co factor matrix
- معادلة خطية Linear Equation

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية Scientific calculator

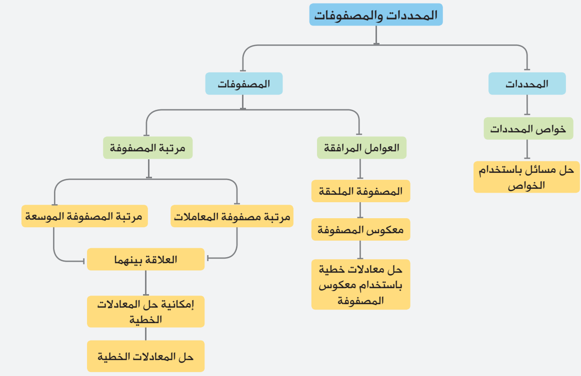
دروس الوحدة

الدرس (١ – ١): المحددات.

الدرس (١ – ٢): المصفوفات.

الدرس (١ – ٣): حل المعادلات الخطية باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة

مخطط تنظيمى للوحدة



كتاب الجبر والهندسة الفراغية - الجبر ٦٥

المصطلحات الأساسية:

المحددات - المصفوفات - خواص المصفوفة - أنواع المصفوفات - مرتبة المصفوفه - العوامل المرافقة - معكوس المصفوفة - مرتبة مصفوفه المعاملات - مرتبة مصفوفه الموسعه - المعادلات الخطية المتجانسة - المعادلات الخطية غير المتجانسة.

زمن تدريس الوحدة:

٧ حصص

مهارات التفكير التى تتميز الوحدة:

التفكير الناقد - التفكير الابداعى - حل المشكلات - التفكير الابداعى - القدره على اتخاذ القرار.

الوسائل التعليمية المستخدمة:

السبوره التعليمية - آلة حاسبة علمية - أقلام - جهاز عرض - آلة حاسبة بيانية.

طرق التدريس المقترحة:

العرض المباشر - العصف الذهنى - المناقشة والحوار - التعلم التعاونى - الاستنتاج - اتخاذ القرار - حل المشكلات

طرق التقييم المقترحة:

تتمثل فى الأسئلة الشفهية والتحريرية الفردية والجماعية فى أثناء الدرس بعد الدرس، والأنشطة المقترحة والتكاليف الفردية والجماعية وتدريبات عامة على الوحدة والاختبار التراكمى فى نهاية الوحدة.

المخطط التنظيمى للوحدة:

- يوضح هذا المخطط العلاقة بين المفاهيم المختلفة التى سيتم دراستها من خلال دروس الوحدة، فقد تناول المخطط مفهوم المحددات والمصفوفات و يندرج تحت المحددات خواصها وكذلك حل تمارين باستخدام المحددات.
- أما المصفوفات فقد تناولنا دراسة خواص المصفوفات ثم العوامل المرافقة وكذلك مرتبة المصفوفة. وأخيرًا حل المعادلات المتجانسة وغير المتجانسة وتوظيف كل ما يتعلق بالمحددات والمصفوفات فى حل مشكلات مرتبطة بالبيئة.

٣ - ١ المحددات

Delerminals

٣ - ١ المحددات

Determinats

سوف تتعلم

- خواص المحددات.
- حل مسائل متنوعة مستخدمًا خواص المحددات.

مصطلحات أساسية

- محدد *Determinants*
- محدد الدرجة الثانية *Second – degree determinant*
- محدد الدرجة الثالثة *Third – degree determinant*
- صف *Row*
- عمود *Column*
- قطر رئيسى *Main diagonal*
- صورة مثلثة *Triangular form*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية *Scientific calculator*
- برامج رسومية لحل المحددات والمصفوفات.

تمهيد

درستَ المصفوفات والمحددات، وعلمتَ بأن كل مصفوفة مربعة لها مُحدِّد المصفوفة و يسمى المحدد ٢ × ٢ بمحدد الدرجة الثانية ومحدد ٣ × ٣ بمحدد الدرجة الثالثة وهكذا...

كما علمتَ كيفية إيجاد قيمة المحدد فمثلًا المحدد: $\begin{vmatrix} أ & جـ \\ ب & ء \end{vmatrix} = أ ء - ب جـ$

فمثلًا قيمة المحدد $\begin{vmatrix} ٣ & ٤ \\ -٥ & ٦ \end{vmatrix} = ٣ \times ٦ - ٤ \, (-٥) = ٣٨$

وكذلك تعلمت كيفية إيجاد قيمة المحدد $\begin{vmatrix} أ & ء & س \\ ب & هـ & ص \\ جـ & و & ع \end{vmatrix}$

باستخدام طريقة العوامل المرفقة فإذا رمزنا لقيمة المحدد بالرمز Δ

فتكون $\Delta = أ \begin{vmatrix} هـ & ص \\ و & ع \end{vmatrix} - ء \begin{vmatrix} ب & ص \\ جـ & ع \end{vmatrix} + س \begin{vmatrix} ب & هـ \\ جـ & و \end{vmatrix}$ وذلك باستخدام عناصر الصف الأول

فكر و ناقش

١ اذا كان $\Delta_1 = \begin{vmatrix} ٣ & -١ \\ ٢ & ٥ \end{vmatrix}$ فإن $\Delta_1 =$ ....

٢ اذا كان $\Delta_2 = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ -١ & ٥ \end{vmatrix}$ فإن $\Delta_2 =$ ....

٣ ما العلاقة بين Δ_1 ، Δ_2 هل هما متساو يان؟ فسر إجابتك.

٤ ما علاقة صفوف المحدد أ بأعمدة المحدد ب؟ ماذا تستنتج؟

تعلم

الخواص الأساسية للمحددات

خاصية (١)

لا تتغير قيمة المحدد عند تبديل صفوف المحدد بأعمدته المناظرة بنفس الترتيب

خلفية:

سبق وأن درس الطالب المصفوفات والمحددات وتعرفت على المصفوفة المربعة وكيفية إيجاد قيمة محددها. وسوف نستكمل فى هذا الدرس خواص المحددات وحل مسائل عليها.

أهداف الدرس:

فى نهاية هذا الدرس، من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف المحددات وخواصها.
- يستنتج بعض خواص المحددات الاساسية.
- يثبت صحة بعض خواص المحددات.
- يحل مسائل باستخدام خواص المحددات.

مفردات أساسية:

محدد - مصفوفه - العوامل المرفقه - خواص المحددات.

المواد التعليمية المستخدمة:

السبوره التعليمية - أقلام - آلة حاسبة علمية - آله حاسبة بيانية - برامج رسومية للحاسوب.

طرق التدريس المقترحة:

العرض المباشر - المناقشة والحوار - العصف الذهنى - حل المشكلات.

مكان التدريس:

الفصل الدراسى

مصادر التعلم

كتاب الطالب من ص(٦٦) إلى ص(٧٨)

الشبكة الدولية للمعلومات (الانترنت)

التهيئة

استرجع مع طلابك ما المقصود بالمحدد حيث هو مجموعة من الاعداد مرتبة فى صفوف وأعمدة بحيث يكون عدد الصفوف يساوى عدد الأعمدة وموضوعة بين خطين رأسيين وتنشأ المحددات كنتيجة لحذف عده متغيرات من مجموعة معادلات خطية .

الصوره العامة للمحدد هـ

$\Delta = \begin{vmatrix} أ & جـ \\ ب & ء \end{vmatrix} = أ ء - ب جـ$

إجراءات الدرس:

- وضح لطلابك أننا سنقتصر فى هذا الدرس على المحددات من الدرجة الثالثة.
- ناقش مع طلابك بند فكر وناقش.

$\triangle = \begin{vmatrix} \text{أ١١} & \text{أ٢١} & \text{أ٣١} \\ \text{ب١٢} & \text{ب٢٢} & \text{ب٣٢} \\ \text{جـ١٣} & \text{جـ٢٣} & \text{جـ٣٣} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{أ١١} & \text{ب١٢} & \text{جـ١٣} \\ \text{أ٢١} & \text{ب٢٢} & \text{جـ٢٣} \\ \text{أ٣١} & \text{ب٣٢} & \text{جـ٣٣} \end{vmatrix}$ ويمكن إثبات ذلك بفك كل من المحددين.

مثال

① أثبت أن $\begin{vmatrix} ٢ & -٣ & -١ \\ ١ & ٠ & ٤ \\ -٢ & ٥ & ٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & -٢ \\ -٣ & ٠ & ٥ \\ -١ & ٤ & ٢ \end{vmatrix}$

الحل

$\begin{vmatrix} ٢ & -٣ & -١ \\ ١ & ٠ & ٤ \\ -٢ & ٥ & ٢ \end{vmatrix} = ٢ \begin{vmatrix} ٠ & ٤ \\ ٥ & ٢ \end{vmatrix} + ٣ \begin{vmatrix} ١ & ٤ \\ -٢ & ٢ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ -٢ & ٥ \end{vmatrix} = ٢(٠ - ٢٠) + ٣(٢ + ٨) - (٥ - ٠) = -١٥$

$\begin{vmatrix} ٢ & ١ & -٢ \\ -٣ & ٠ & ٥ \\ -١ & ٤ & ٢ \end{vmatrix} = ٢ \begin{vmatrix} ٠ & ٥ \\ ٤ & ٢ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -٣ & ٥ \\ -١ & ٢ \end{vmatrix} - ٢ \begin{vmatrix} -٣ & ٠ \\ -١ & ٤ \end{vmatrix} = ٢(٠ - ٢٠) - (-٦ + ٥) - ٢(-٢، - ٠) = -١٥$

لذلك فإن: $\begin{vmatrix} ٢ & -٣ & -١ \\ ١ & ٠ & ٤ \\ -٢ & ٥ & ٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & -٢ \\ -٣ & ٠ & ٥ \\ -١ & ٤ & ٢ \end{vmatrix}$

حاول أن تحل

① أثبت أن $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & -٣ \\ ٥ & ٤ & ١ \\ -١ & ٣ & ٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ٥ & -١ \\ ٢ & ٤ & ٣ \\ -٣ & ١ & ٢ \end{vmatrix}$

خاصية (٢)

قيمة المحدد لاتتغير بفكه عن طريق عناصر أى صف (عمود).

مثال

② أثبت أن $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & -١ \\ ٠ & ٤ & ٣ \\ ٥ & -١ & ٠ \end{vmatrix}$ مستخدمًا عناصر العمود الأول مرة ومستخدمًا عناصر الصف الأول مرة أخرى.

⌑ اترك للطلاب فرصة لإيجاد حل الفقرتين و يستنتج أن

$\triangle_{١} ، \triangle_{٢} = ١٧$

⌑ ناقش مع طلابك فى تفسير النتيجة التى توصلوا إليها.

⌑ انتقل بعدها إلى خواص المحددات

⌑ يمكن اثبات خاصية (١) كالتالى:

أى $\begin{vmatrix} \text{أ١١} & \text{أ٢١} & \text{أ٣١} \\ \text{ب١٢} & \text{ب٢٢} & \text{ب٣٢} \\ \text{جـ١٣} & \text{جـ٢٣} & \text{جـ٣٣} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{أ١١} & \text{ب١٢} & \text{جـ١٣} \\ \text{أ٢١} & \text{ب٢٢} & \text{جـ٢٣} \\ \text{أ٣١} & \text{ب٣٢} & \text{جـ٣٣} \end{vmatrix}$

الطرف الايمن =

$\text{أ١١} \begin{vmatrix} \text{أ٢٢} & \text{أ٣٢} \\ \text{أ٢٣} & \text{ب٣٣} \end{vmatrix} - \text{أ٢١} \begin{vmatrix} \text{أ١٢} & \text{أ٣٢} \\ \text{أ١٣} & \text{ب٣٣} \end{vmatrix} + \text{أ٣١} \begin{vmatrix} \text{أ١٢} & \text{أ٢٢} \\ \text{أ١٣} & \text{ب٢٣} \end{vmatrix}$

= أ١١ أ١٣ أ٣٣ − أ١١ أ٣٢ أ٢٣ − أ٢١ أ١٢ أ٣٣ + أ٢١ أ٣٢ أ١٣ + أ٣١ أ١٢ أ٢٣

الطرف الأيمن بفكه سنصل إلى نفس النتيجة.

⌑ لاحظ أن مثال (١) بدون فك المحدد لذلك يمكن استبدال الصفوف مكان الأعمدة بنفس الترتيب لتعطى نفس النتيجة.

التقييم المستمر: (المناقشة والحوار)

مناقشة ما ورد فى بند حاول أن تحل وتوصل معهم للإجابات الصحيحة. مع توضيح أن حاول أن تحل هو تطبيق فباشر للمثال السابق.

حاول أن تحل (١) ص (٧٥)

$\triangle_{١} = ١(٨ - ٣) - ٢(١٠ + ١) - ٣(١٥ + ٤) = -٧٤$

$\triangle_{٢} = ١(٨ - ٣) - ٥(٤ + ٩) - ١(٢ + ١٢) = -٧٤$

أى أن المحدد لاتتغير قيمة باستبدال الصفوف محل الأعمدة أو العكس.

⌑ اعطا لطلابك المحدد

أوجد قيمة المحدد: $\begin{vmatrix} \text{أ١١} & \text{أ٢١} & \text{أ٣١} \\ \text{صفر} & \text{صفر} & \text{صفر} \\ \text{جـ١٣} & \text{جـ٢٣} & \text{جـ٣٣} \end{vmatrix}$

⌑ ناقش مع طلابك حل المحدد السابق وتوصل معهم إلى النتجة أو الخاصية (٢) وتسلهم متى تكون قيمة المحدد = صفر؟

وهى إذا كانت جميع عناصر أى (صف) (عمود) فى محدد تساوى صفر فإن قيمة المحدد = صفر

⌑ اسأل طلابك فإذا كان (العمود) مساويًا للصفر فهل يمكن ايجاد قيمة المحدد؟

⌑ وضح لطلابك أن باستخدام الخاصية (١) لها أهمية خاصة وذلك لأنكتابه مفكوك المحدد بدلاله عناصر العمود الأول بدلًا من عناصر الصف يوفر بعض الوقت والجهد وخاصة إذا كان العمود الأول بعض عناصره بها أصفار.

⌑ اترك للطلاب للتأكد من الحل المثال التالى

فى بند خاصية (٣) ص (٧٦)

¤ ناقش مع طلابك الحالات التى تنعدم فيها قيمة المحدد (△ = ٠) ثم أعط لهم أمثلة عددية بسيطة لتأكيد تلك الخاصية.

الخواص (٤ - ٦)

¤ ناقش مع طلابك تلك الخواص للمحددات وقم بإعطائهم أمثلة عددية بسيطة توضح ذلك.

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

¤ ناقش مع طلابك ما ورد فى بند حاول أن تحل ص (٦٨) ، (٦٩) وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة.

حلول: ص٧٧

② قيمة المحدد عن طريق استخدام عناصر $ص_1$

= ٢ (-٣ - ٤) - ٣ (-٩ - ٢) + (-٦ - ١) = -١٨

قيمة المحدد عن طريق استخدام عناصر $ع_2$

= -٣ (-٩ - ٢) + ١ (-٦ - ١) -٢ (-٤ - ٣) = -١٨ لاتتغير قيمة المحدد بفكه عن طريق أحد صفوفه أو أعمدته.

حاول أن تحل (٣) ص (٦٩)

∵ س ص ع مثلث

$$\therefore \frac{س}{جا س} = \frac{ص}{جا ص} = \frac{ع}{جا ع} = ٢نق$$

$$\therefore \begin{vmatrix} ٢نق\ جا س & ٧ & جا س \\ ٢نق\ جا ص & ٨ & جا ص \\ ٢نق\ جا ع & -٣ & جا ع \end{vmatrix}$$ نأخذ ٢نق

عامل مشترك من العمود الأول

$$\therefore \triangle = ٢نق \begin{vmatrix} جا س & ٧ & جا س \\ جا ص & ٨ & جا ص \\ جا ع & -٣ & جا ع \end{vmatrix} = صفر$$

لتساوى العناصر المتناظرة فى $ع_1$ ، $ع_3$

حاول أن تحل (٤) ص (٦٩)

بأخذ (٢) مشترك من $ص_1$ ، (-٤) مشترك من $ص_3$

△ = ٢ × -٤ × ١٠ = -٨٠

الوحدة الثالثة: المحددات والمصفوفات

الحل

أولاً : باستخدام عناصر العمود الأول

$$\triangle = \begin{vmatrix} ٤ & ٣ \\ -١ & ٠ \end{vmatrix} + ٥ \begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ ٤ & ٣ \end{vmatrix} = (٠ + ٣) + ٥ (٦ + ٤) = ٥٣$$

ثانيًا: باستخدام عناصر الصف الأول

$$\triangle = \begin{vmatrix} ٤ & ٣ \\ -١ & ٠ \end{vmatrix} -٢ \begin{vmatrix} ٠ & ٣ \\ ٥ & ٠ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ٠ & ٤ \\ ٥ & -١ \end{vmatrix} = (٠ + ٣) -٢ (٠ -١٥) - (٠ - ٢٠) = ٣ + ٣٠ + ٢٠ = ٥٣$$

حاول أن تحل

② أوجد قيمة المحدد $\begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ١ \\ ٣ & ١ & ٢ \\ ١ & ٢ & ٣ \end{vmatrix}$ مستخدمًا عناصر الصف الأول مرة ومستخدمًا عناصر العمود الثانى مرة أخرى.

خاصية (٣)

قيمة المحدد تنعدم فى الحالات الثلاث الآتية:

أولًا: اذا كانت جميع عناصر أى صف (عمود) فى محدد تساوى صفر فإن قيمة المحدد = صفر

قيمة المحدد $\begin{vmatrix} أ_{11} & أ_{21} & أ_{31} \\ صفر & صفر & صفر \\ أ_{13} & أ_{23} & أ_{33} \end{vmatrix} = صفر$

ويمكن إثبات ذلك بفك المحدد باستخدام عناصر الصف الثانى يكون: △ = صفر

ثانيًا: إذا تساوت العناصر المتناظرة فى أى صفين (عمودين) فى محدد، فإن قيمة المحدد = صفر

أى إن $\begin{vmatrix} أ & ب & جـ \\ أ & ب & جـ \\ س & ص & ع \end{vmatrix} = صفر$

وذلك لتساوى العناصر المتناظرة فى الصفين الأول والثانى (أثبت ذلك).

ثالثًا: إذا كانت عناصر صف (عمود) مضاعفات للعناصر المناظرة لصف (عمود) آخر .

مثال

③ بدون فك المحدد أثبت أن $\begin{vmatrix} ١ & -٥ & ٨ \\ ٣ & ٧ & ٩ \\ -٢ & ١٠ & -١٦ \end{vmatrix} = صفر$

الحل

فى المحدد نجد أن $ص_3 = -٢ ص_1$ ∴ قيمة المحدد = صفر

٦٨ الصف الثالث الثانوى - كتاب الطالب

المحددات | ٣ - ١

حاول أن تحل

③ فى △ س ص ع مستخدمًا خواص المحددات أثبت أن $\begin{vmatrix} س/ & ٧ & جا س \\ ص/ & ٨ & جا ص \\ ع/ & -٣ & جا ع \end{vmatrix} = صفر$

خاصية (٤)

إذا وجد عامل مشترك فى جميع عناصر صف (عمود) فى محدد فإن هذا العامل يمكن أخذه خارج المحدد.

خاصية (٥)

إذا ضربت جميع عناصر أى صف (عمود) من محدد فى عدد حقيقى ك ، فإن قيمة المحدد الناتج = ك × قيمة المحدد الأصلى، والعكس إذا وجد عامل مشترك فى جميع عناصر أى صف "أو أى عمود" فى محدد فإن هذا العامل يمكن أخذه خارج العمود "مضروبًا فيه"

مثال

④ بدون فك المحدد أوجد قيمة $\begin{vmatrix} ٣ & ٢ & -٧ \\ ٤ & ٦ & ٢ \\ ١٠ & ١٥ & ٥ \end{vmatrix}$

الحل

بأخذ ٢ عامل مشترك من $ص_2$، ٥ عامل مشترك من $ص_3$

$$\begin{vmatrix} ٣ & ٢ & -٧ \\ ٤ & ٦ & ٢ \\ ١٠ & ١٥ & ٥ \end{vmatrix} = ٢ \times ٥ \begin{vmatrix} ٣ & ٢ & -٧ \\ ٢ & ٣ & ١ \\ ٢ & ٣ & ١ \end{vmatrix} = ١٠ \times صفر = صفر$$

وذلك لتساوى العناصر المتناظرة فى $ص_2$ ، $ص_3$ "حاول إثبات ذلك بطريقة أخرى".

حاول أن تحل

④ إذا كان $\begin{vmatrix} أ & ى & م \\ ب & هـ & ن \\ جـ & و & ع \end{vmatrix} = ١٠$ أوجد فيه $\begin{vmatrix} ٢أ & ٢ى & ٢م \\ ب & هـ & ن \\ -٤جـ & -٤و & -٤ع \end{vmatrix}$

خاصية (٦)

إذا بدلنا موضع صفين (عمودين) فإن المحدد الناتج = - المحدد الأصلى

$$\begin{vmatrix} أ_{11}\ أ & أ_{21}\ ب & أ_{31}\ جـ \\ أ_{12}\ ى & أ_{22}\ هـ & أ_{32}\ و \\ أ_{13}\ س & أ_{23}\ ص & أ_{33}\ ع \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} أ_{11}\ أ & أ_{21}\ ب & أ_{31}\ جـ \\ أ_{12}\ س & أ_{22}\ ص & أ_{32}\ ع \\ أ_{13}\ ى & أ_{23}\ هـ & أ_{33}\ و \end{vmatrix}$$

بتبديل الصفين الثانى والثالث وبصوره أخرى تكتب بتبديل $ص_2$، $ص_3$

كتاب الجبر والهندسة الفراغية - الجبر ٦٩

فى بند خاصية (٧)

- ناقش الطلاب في خاصية (٧) وأشر إليهم أنه يمكن كتابة المحدد على صورة مجموع محددين ثم ناقش معهم المثال المحلول كتطبيق مباشر على خاصية (٧)

فى بند تفكير ناقد:

يهدف إلى استخدام خواص أخرى فى إثبات أن قيمة المحدد = صفر دون فكه ومنها الحل الآتى:

الطرف الأيمن =

$$\begin{vmatrix} \text{ن} & \text{م} & \text{ل} \\ \text{ع} & \text{ص} & -\text{س} \\ \text{ر} & \text{ك} & \text{ق} \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} \text{ن} & \text{م} & \text{ل} \\ \text{ع} & \text{ص} & -\text{س} \\ \text{ر} & \text{ك} & \text{ق} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

أخذنا (-١) عاملا مشتركا من عناصر $\text{ع}_{١}$ فى المحدد الثانى

تمرين إثرائى:

اكتب المحدد $\begin{vmatrix} ٥ & ٣ & ٤- \\ ٣ & ٢ & ١ \\ ٦ & ٥ & ٤ \end{vmatrix}$ على الصورة مجموع محددين قيمة أحدهما صفر؟

الحل:

نلاحظ أن المطلوب هو أن نضع عناصر أى صف أو عمود على صوره مجموع عددين أحدهما مساوٍ للعنصر المناظر من عناصر صف آخر (أو عمود آخر) ثم نجرىء المحدد إلى محددين حسب خاصية (٥) كالتالى:

$$\begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ٤- \\ ١ & ٢ & ١ \\ ١ & ٥ & ٤ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٣ & ٣ & ٤- \\ ٢ & ٢ & ١ \\ ٥ & ٥ & ٤ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٢+٣ & ٣ & ٤- \\ ١+٢ & ٢ & ١ \\ ١+٥ & ٥ & ٤ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٥ & ٣ & ٤- \\ ٣ & ٢ & ١ \\ ٦ & ٥ & ٤ \end{vmatrix}$$

باستخدام أحد الخواص، نلاحظ أن عناصر العمودين الأول والثانى متساويان وبالتالي قيمة المحدد = صفر

- كرر العملية ولكن بتجزىء عناصر الصف الأول لتشتمل على العناصر المناظره من الصف الثانى كالتالى:

$$= \begin{vmatrix} ٣+٢ & ٢+١ & ١+٥- \\ ٣ & ٢ & ١ \\ ٦ & ٥ & ٤ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٥ & ٣ & ٤- \\ ٣ & ٢ & ١ \\ ٦ & ٥ & ٤ \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٣ & ٢ & ١ \\ ٦ & ٥ & ٤ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٥- \\ ٣ & ٢ & ١ \\ ٦ & ٥ & ٤ \end{vmatrix}$$

واضح أن المحدد الثانى يساوى ٠ لتساوى عناصر الصفين الثانى والثالث

مثال

٥ بدون فك المحدد أثبت أن:

$$\begin{vmatrix} ٢ & ١- & ٢ \\ ٣ & ٣ & ٤ \\ ٥ & ٧ & ٦ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٣ & ٣ & ٤ \\ ٢ & ١- & ٢ \\ ٥ & ٧ & ٦ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

(الأعمدة مكتوبة من اليمين إلى اليسار كما في الأصل)

الحل

بتبديل الصفين الأول و الثانى فى المحدد الأول

$$\therefore \; - \begin{vmatrix} ٣ & ٣ & ٤ \\ ٢ & ١- & ٢ \\ ٥ & ٧ & ٦ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٣ & ٣ & ٤ \\ ٢ & ١- & ٢ \\ ٥ & ٧ & ٦ \end{vmatrix} = -\triangle + \triangle = \text{صفر}$$

خاصية (٧)

إذا كتبت جميع عناصر أى صف "عمود" كمجموع عنصرين فإنه يمكن كتابة المحدد الأصلى على صورة مجموع محددين

$$\begin{vmatrix} \text{أ}_{١١}+\text{م} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{١٢}+\text{ن} & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{١٣}+\text{هـ} & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{م} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{ن} & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{هـ} & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix}$$

ويمكن إثبات ذلك بإيجاد قيمة فك المحددات.

مثال

٦ بدون فك المحددات أثبت أن:

$$\begin{vmatrix} \text{ل} & \text{م} & \text{ن} \\ -\text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ \text{ق} & \text{ك} & \text{ر} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\text{ل} & \text{م} & \text{ن} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ -\text{ق} & \text{ك} & \text{ر} \end{vmatrix} = \text{صفرًا}$$

الحل

يمكن كتابة محدد قيمته تساوى مجموع قيمتى المحددين بالطرف الأيمن

(بملاحظة أن المحددين فى الطرف الأيمن يتساوى لهما نفس العمودين $\text{ع}_{١}$، $\text{ع}_{٢}$ ويجمع المحددين:

$$\text{الطرف الأيمن} = \begin{vmatrix} \text{ل}-\text{ل} & \text{م} & \text{ن} \\ -\text{س}+\text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ \text{ق}-\text{ق} & \text{ك} & \text{ر} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٠ & \text{م} & \text{ن} \\ ٠ & \text{ص} & \text{ع} \\ ٠ & \text{ك} & \text{ر} \end{vmatrix} = \text{صفرًا}$$

(لأن عناصر $\text{ع}_{١}$ فى محدد المجموع أصفار)

تفكير ناقد: هل يمكنك استخدام طرق أخرى لإيجاد قيمة المحددات دون فكها؟ أذكر أحدى هذه الطرق.

حاول أن تحل

٥ أوجد المحدد م = $\text{م}_{١} + \text{م}_{٢} + \text{م}_{٣}$ حيث

$$\text{م}_{١} = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ٤ \\ ٥ & ٢- & ٣ \\ ٠ & ٤ & ١- \end{vmatrix} ، \; \text{م}_{٢} = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ٤ \\ ١- & ٥ & ٢ \\ ٠ & ٤ & ١- \end{vmatrix} ، \; \text{م}_{٣} = \begin{vmatrix} ٢ & ١- & ٤ \\ ٤ & ١ & ٥ \\ ٠ & ١ & ١- \end{vmatrix}$$

خاصية (٨)

إذا أضفنا لعناصر أى صف (عمود) بمحدد مضاعفات عناصر أى صف (عمود) أخر فإن قيمة المحدد لا تتغير

$$\begin{vmatrix} \text{أ}_{١} & \text{ب}_{١} & \text{جـ}_{١} \\ \text{أ}_{٢} & \text{ب}_{٢} & \text{جـ}_{٢} \\ \text{أ}_{٣} & \text{ب}_{٣} & \text{جـ}_{٣} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{أ}_{١}+\text{م}\,\text{أ}_{٢} & \text{ب}_{١}+\text{م}\,\text{ب}_{٢} & \text{جـ}_{١}+\text{م}\,\text{جـ}_{٢} \\ \text{أ}_{٢} & \text{ب}_{٢} & \text{جـ}_{٢} \\ \text{أ}_{٣} & \text{ب}_{٣} & \text{جـ}_{٣} \end{vmatrix}$$

أضفنا إلى عناصر الصف الأول عناصر الصف الثانى مضروبه فى م و نرمز لهذه العملية بالرمز $\text{ص}_{١} + \text{م}\,\text{ص}_{٢}$
و يمكن إثبات ذلك بتجزئة عناصر الصف الأول لمحدد الطرف الأيسر تبعًا للخاصية السابقة إلى مجموع محددين أحدهما يعطى محدد الطرف الأيمن والآخر قيمته = صفر

مثال

٧ بدون فك المحدد أوجد قيمة:

$$\begin{vmatrix} ٣ & ٨ & ١٢ \\ ٩ & ٢١ & ٢٧ \\ ٢٠ & ٤٤ & ٥٢ \end{vmatrix}$$

الحل

بضرب عناصر العمود الأول × -٢ و إضافتهما إلى العناصر المناظرة فى العمود الثانى

أى إن: $-٢\text{ع}_{١} + \text{ع}_{٢}$ وكذلك: $-٢\text{ع}_{١} + \text{ع}_{٣}$

$$\begin{vmatrix} ٣ & ٨ & ١٢ \\ ٩ & ٢١ & ٢٧ \\ ٢٠ & ٤٤ & ٥٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٣ & ٨-٢\times٣ & ١٢-٢\times٣ \\ ٩ & ٢١-٢\times٩ & ٢٧-٢\times٩ \\ ٢٠ & ٤٤-٢\times٢٠ & ٥٢-٢\times٢٠ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ٦ \\ ٩ & ٣ & ٩ \\ ٢٠ & ٤ & ١٢ \end{vmatrix}$$

وهنا نلاحظ أن عناصر العمود الثالث مضاعفات عناصر العمود الثانى

∴ قيمة المحدد = صفر

حاول أن تحل

٦ بدون فك المحدد أوجد قيمة

$$\begin{vmatrix} ٢ & ٥ & ٧- \\ ٣- & ١- & ٤ \\ ٣ & ١ & ٤- \end{vmatrix}$$

المحدد على الصورة المثلثية:

⌑ وضح لطلابك ما المقصود بالصورة المثلثة للمحدد وهى أن تكون جميع عناصر المحدد الواقعة أعلى القطر الرئيسى أو أسفله كلها أصفار كما هو موضح بالشكل ص(٧٢) من كتاب الطالب.

حيث تسمى $\text{أ}_{١١}$ $\text{أ}_{١٣}$ $\text{أ}_{٣٣}$ بعناصر القطر الرئيسى

في هذه الحالة تسمى المحدد بالصورة المثلثه.

⌑ ناقش مع طلابك أهمية وجود الصورة المثلثة للمحدد أثناء حل المسائل.

⌑ إن الوصول إلى الصورة المثلثة تساعد بشكل كبير فى إيجاد ناتج المحدد بصورة أسرع حيث نطبق خاصية (٨) أنه فى حالة الوصول إلى الصورة المثلثة فإن قيمة المحدد تتحدد بضرب $\text{أ}_{١١} \times \text{أ}_{٢٢} \times \text{أ}_{٣٣}$ (عناصر القطر الرئيسى)

$$\begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & - & - \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} & - \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ - & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ - & - & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix}$$

القطر الرئيس

⌑ أكد على طلابك بأن:

⌑ قيمة المحدد على الصورة المثلثة $\text{أ}_{١١} \times \text{أ}_{٢٢} \times \text{أ}_{٣٣}$

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

حاول أن تحل (٦)

$$\begin{vmatrix} \text{أ - ب - جـ} & \text{٢ ب} & \text{٢ جـ} \\ \text{٢أ} & \text{ب - جـ - أ} & \text{٢ جـ} \\ \text{٢أ} & \text{٢ ب} & \text{جـ - أ - ب} \end{vmatrix}$$

بإضافة عناصر $\text{ع}_٢ + \text{ع}_٣$ إلى $\text{ع}_١$ ينتج أن

$$\begin{vmatrix} \text{أ + ب + جـ} & \text{٢ ب} & \text{٢ جـ} \\ \text{أ + ب + جـ} & \text{ب - جـ - أ} & \text{٢ جـ} \\ \text{أ + ب + جـ} & \text{٢ ب} & \text{جـ - أ - ب} \end{vmatrix}$$

يأخذ (أ + ب + جـ) عامل مشترك من $\text{ع}_١$

$$(\text{أ + ب + جـ}) \begin{vmatrix} ١ & \text{٢ ب} & \text{٢ جـ} \\ ١ & \text{ب - جـ - أ} & \text{٢ جـ} \\ ١ & \text{٢ ب} & \text{جـ - أ - ب} \end{vmatrix}$$

خاصية (٩)

فى أى محدد إذا ضربنا عناصر أى صف (عمود) فى العوامل المرافقة للعناصر المناظرة فى أى صف (عمود) آخر ثم جمعنا نواتج الضرب فإن الناتج يكون مساويًا صفرا.

فى المحدد $\begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix}$

حيث عناصر الصف الأول هى $\text{أ}_{١١}$ ، $\text{أ}_{٢١}$ ، $\text{أ}_{٣١}$، العوامل المرافقة المناظرة لعناصر الصف الثانى هى:

$(-١)^{٢+١} \times \text{م}_{١٢}$ ، $(-١)^{٢+٢} \times \text{م}_{٢٢}$ ، $(-١)^{٢+٣} \times \text{م}_{٣٢}$

$$\text{المحدد} = -\text{أ}_{١١} \begin{vmatrix} \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix} + \text{أ}_{٢١} \begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix} - \text{أ}_{٣١} \begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix} = \text{صفر} \qquad (\text{لأن: } \text{ص}_١ = \text{ص}_٢)$$

فمثلًا: إذا كان $\text{أ} = \begin{vmatrix} ٢ & ٤ & ٧ \\ ٣ & -٢ & ١ \\ ١ & ٥ & ٦ \end{vmatrix}$ فإن عناصر $\text{ص}_١$ هى ٢، ٤، ٧

والعوامل المرافقة المناظرة لعناصر الصف الثالث هى:

$(١)^{٣+١} \begin{vmatrix} ٤ & ٧ \\ -٢ & ١ \end{vmatrix}$ ، $(١)^{٣+٢} \begin{vmatrix} ٢ & ٧ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix}$ ، $(١)^{٣+٣} \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ٣ & -٢ \end{vmatrix}$

أى إن: ١(٤ + ١٤) ، -١ (٢ - ٢١) ، ١ (-٤ - ١٢)

أى إن: ١٨ ، ١٩ ، -١٦

مجموع حواصل ضرب عناصر $\text{ص}_١$ فى العوامل المرافقة لعناصر $\text{ص}_٣$

= ٢ × ١٨ + ٤ × ١٩ + ٧ × -١٦ = صفرًا.

المحدد على الصورة المثلثة

إذا كتب المحدد بإحدى الصورتين ، سُميت هذه الصورة بالصورة المثلثية السفلى والعليا على الترتيب

$$\begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & - & - \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} & - \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ - & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ - & - & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix}$$

القطر الرئيس القطر الرئيس

وتكون جميع عناصر المحدد الواقعة أعلى القطر الرئيس كما فى الحالة الأولى أو أسفله كما فى الحالة الثانية كلها أصفار، كما تسمى العناصر $\text{أ}_{١١} \times \text{أ}_{٢٢} \times \text{أ}_{٣٣}$ بعناصر القطر الرئيسى.

خاصية (١٠)

قيمة المحدد على الصورة المثلثة تساوى حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسى
قيمة المحدد $\text{أ}_{١١} \times \text{أ}_{٢٢} \times \text{أ}_{٣٣}$ من الصورة السابقة.

مثال

(٨) بدون فك المحدد أثبت أن: $\begin{vmatrix} ١ & \text{أ} & \text{أ}^٢ \\ ١ & \text{ب} & \text{ب}^٢ \\ ١ & \text{جـ} & \text{جـ}^٢ \end{vmatrix} = (\text{أ - ب})(\text{ب - جـ})(\text{جـ - أ})$

الحل

بضرب عناصر الصف الأول × -١ و إضافتها إلى العناصر المناظره لكل من الصفين الثانى والثالث

$$\begin{vmatrix} ١ & \text{أ} & \text{أ}^٢ \\ ٠ & \text{ب - أ} & \text{ب}^٢ - \text{أ}^٢ \\ ٠ & \text{جـ - أ} & \text{جـ}^٢ - \text{أ}^٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & \text{أ} & \text{أ}^٢ \\ ٠ & \text{ب - أ} & \text{(ب - أ)(ب + أ)} \\ ٠ & \text{جـ - أ} & \text{(جـ - أ)(جـ + أ)} \end{vmatrix}$$

بأخذ (ب - أ) (جـ - أ) مشتركًا

$$= (\text{ب - أ})(\text{جـ - أ}) \begin{vmatrix} ١ & \text{أ} & \text{أ}^٢ \\ ٠ & ١ & \text{ب + أ} \\ ٠ & ١ & \text{جـ + أ} \end{vmatrix}$$

بضرب عناصر الصف الثانى ×-١ و إضافتها إلى العناصر المناظرة فى الصف الثالث

$$= (\text{ب - أ})(\text{جـ - أ}) \begin{vmatrix} ١ & \text{أ} & \text{أ}^٢ \\ ٠ & ١ & \text{ب + أ} \\ ٠ & ٠ & \text{جـ - ب} \end{vmatrix}$$

= (ب - أ) (جـ - أ) (جـ - ب)

= (أ - ب) (ب - جـ) (جـ - أ)

حاول أن تحل

(٧) بدون فك المحدد أثبت أن $\begin{vmatrix} \text{أ - ب - جـ} & \text{٢ب} & \text{٢جـ} \\ \text{٢أ} & \text{ب - جـ - أ} & \text{٢جـ} \\ \text{٢أ} & \text{٢ب} & \text{جـ - أ - ب} \end{vmatrix} = (\text{أ + ب + جـ})^٢$

بضرب (-١) ص١ + ص٢ ، (-١) ص١ + ص٣

ينتج أن

$$(\text{ا}+\text{ب}+\text{جـ})\begin{vmatrix} \text{٢جـ} & \text{٢ب} & \text{١} \\ \text{٠} & \text{ب - جـ - ا} & \text{٠} \\ \text{جـ - ا - ب} & \text{٠} & \text{٠} \end{vmatrix}$$

$= (\text{ا}+\text{ب}+\text{جـ})\,(\text{-ب - جـ - ا})^{٢}$

$= (\text{ا}+\text{ب}+\text{جـ})^{٣}$

حل بعض تمارين الدرس الأول

(١) أ   (٢) ب   (٣) أ   (٤) أ

(٥) أ   (٦) ب   (٦) د   (٨) د

(٩) د   (٩) د

(١٢) ∵ $\overline{\text{ءهـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ فى △ ا ب جـ

∴ $\dfrac{\text{ء هـ}}{\text{ب جـ}} = \dfrac{\text{اء}}{\text{اب}} = \dfrac{\text{اهـ}}{\text{اجـ}} = \text{م}$

∴ △ء $\begin{vmatrix} \text{٣} & \text{٢} & \text{١} \\ \text{م اجـ} & \text{م اب} & \text{م ب جـ} \\ \text{اجـ} & \text{اب} & \text{ب جـ} \end{vmatrix}$ = صفر

يوجد تناسب من ص٢ ، ص٣

(١٢) ∴ اء منتصف د(ا) من الداخل

∴ م $\dfrac{\text{اب}}{\text{اجـ}} = \dfrac{\text{ب ء}}{\text{ء جـ}}$ ∴ $\dfrac{\text{اب + اجـ}}{\text{اجـ}} = \dfrac{\text{ب جـ}}{\text{ء جـ}}$

$$\triangle = \begin{vmatrix} \text{٥} & \text{٣} & \text{٢} \\ \text{م (ب ء + ء جـ)} & \text{م ء جـ} & \text{م ب ء} \\ \text{ب جـ} & \text{ء جـ} & \text{ب ء} \end{vmatrix}$$

$$= \text{م} \begin{vmatrix} \text{٥} & \text{٣} & \text{٢} \\ \text{ب جـ} & \text{ء جـ} & \text{ب ء} \\ \text{ب جـ} & \text{ء جـ} & \text{ب ء} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

يتساوى ص٢ ، ص٣

تمارين (٣ - ١)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) إذا كان $\begin{vmatrix} \text{جـ} & \text{ب} & \text{ا} \\ \text{و} & \text{هـ} & \text{ء} \\ \text{ع} & \text{ص} & \text{س} \end{vmatrix}$ = ١٢ فإن $\begin{vmatrix} \text{ص} & \text{س} & \text{ع} \\ \text{هـ} & \text{ء} & \text{و} \\ \text{ب} & \text{ا} & \text{جـ} \end{vmatrix}$ =

أ -١٢   ب -٦   جـ ٦   د ١٢

(٢) إذا كان $\begin{vmatrix} \text{جـ} & \text{ب} & \text{ا} \\ \text{و} & \text{هـ} & \text{ء} \\ \text{ع} & \text{ص} & \text{س} \end{vmatrix}$ = ١٥ فإن $\begin{vmatrix} \text{جـ} & \text{ب} & \text{ا} \\ \text{ع} & \text{ص} & \text{س} \\ \text{و} & \text{هـ} & \text{ء} \end{vmatrix}$ =

أ -٣٠   ب -١٥   جـ صفر   د ١٥

(٣) $\begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ا} & \text{ا} \\ \text{جـ} & \text{ب} & \text{ا} \\ \text{جـ} & \text{جـ} & \text{جـ} \end{vmatrix}$ =

أ صفر   ب اجـ   جـ ب جـ   د اب جـ

(٤) $\begin{vmatrix} \frac{\text{١}}{\text{جـ}} & \text{ا} & \text{اب} \\ \frac{\text{١}}{\text{ب}} & \text{جـ} & \text{اجـ} \\ \frac{\text{١}}{\text{ا}} & \text{ب} & \text{ب جـ} \end{vmatrix}$ =

أ صفر   ب ١   جـ ٢   د ٥

(٥) $\begin{vmatrix} \text{ع - س} & \text{ص - ع} & \text{س - ص} \\ \text{س - ص} & \text{ع - س} & \text{ص - ع} \\ \text{ص - ع} & \text{س - ص} & \text{ع - ص} \end{vmatrix}$ =

أ صفر   ب س - ص   جـ ص-ع   د ع - س

(٦) إذا كانت ت^{٢}=-١ فإن $\begin{vmatrix} \text{ت + ١} & \text{ت} & \text{١} \\ \text{ت - ١} & \text{١} & \text{٠} \\ \text{ت} & \text{ت} & \text{٠} \end{vmatrix}$ =

أ ٢ت - ١   ب ٢ت + ١   جـ ت   د ١

(٧) مجموعة حل المعادلة $\begin{vmatrix} \text{٣س} & \text{٢س} & \text{س} \\ \text{س} & \text{٢س} & \text{٣س} \\ \text{٠} & \text{-س} & \text{س} \end{vmatrix}$ = ٩٦ فى ح هى

أ ٤   ب ٣   جـ ٢   د -٢

(٨) فى △ ا ب جـ يكون $\begin{vmatrix} \text{جـَ} & \text{بَ} & \text{اَ} \\ \text{٨} & \text{٧} & \text{٥} \\ \text{جا جـ} & \text{جا ب} & \text{جا ا} \end{vmatrix}$ =

أ ٥اَ   ب ٧بَ   جـ ٨جـَ   د صفر

(٩) إذا كان ن = $\begin{vmatrix} \text{٣} & \text{٠} & \text{١} \\ \text{٥} & \text{٣} & \text{٢} \\ \text{٢} & \text{٤} & \text{١} \end{vmatrix}$ ، م = $\begin{vmatrix} \text{٩} & \text{٠} & \text{٣} \\ \text{١٠} & \text{٦} & \text{٤} \\ \text{١٠} & \text{٢٠} & \text{٥} \end{vmatrix}$ فإن م =

أ ن   ب ١٠ن   جـ ٢٠ن   د ٣٠ن

(١٠) $\begin{vmatrix} \text{٩} & \text{-١} & \text{١} \\ \text{-٧} & \text{٠} & \text{١} \\ \text{٠} & \text{٧} & \text{-٩} \end{vmatrix}$ =

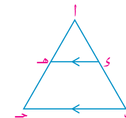
أ -٩   ب -٧   جـ -١   د صفر

(١١) أثبت أن $\begin{vmatrix} \text{س}^{٢} & \text{س} & \text{١} \\ \text{ص}^{٢} & \text{ص} & \text{١} \\ \text{ع}^{٢} & \text{ع} & \text{١} \end{vmatrix}$ = (س -ص) (ص - ع) (ع -س)

ثم أوجد قيمة المحدد العددية إذا كان س - ص = ٥ ، ص - ع = ٧

(١٢) الربط بالهندسة: فى الشكل المقابل $\overline{\text{ءهـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

أثبت أن $\begin{vmatrix} \text{٣} & \text{٢} & \text{١} \\ \text{اهـ} & \text{اء} & \text{ءهـ} \\ \text{اجـ} & \text{اب} & \text{ب جـ} \end{vmatrix}$ = صفر



(١٤) بجمع عناصر $ع_1$، $ع_2$

$$\therefore = \begin{vmatrix} \text{١} & \text{جا}^2\text{س} + \text{جتا}^2\text{س} & \text{جا}^2\text{س} \\ \text{١} & \text{جا}^2\text{ص} + \text{جتا}^2\text{ص} & \text{جا}^2\text{ص} \\ \text{١} & \text{جا}^2\text{ع} + \text{جتا}^2\text{ع} & \text{جا}^2\text{ع} \end{vmatrix}$$

لتساوى عناصر $ع_1$، $ع_2$ لأن جا²س + جتا²س = ١

(١٦)
$$\begin{vmatrix} \text{٠} & \text{-س} & \text{١} \\ \text{س} & \text{١} & \text{س} \\ \text{س}+\text{١} & \text{-١} & \text{١} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{س} & \text{س}^2+\text{١} \\ \text{س}+\text{١} & \text{س}-\text{١} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \text{١} & \text{س}^2+\text{١} \\ \text{س} & \text{-س} \end{vmatrix}$$

س³ + س² + س + ١ - س² + س = س³ + س

٢س + ١ = س ∴ س = -١

(١٩)
$$\begin{vmatrix} \text{١} & \text{١} & \text{١} \\ \text{جـ} & \text{ب} & \text{ا} \\ \text{جـ}^2 & \text{ب}^2 & \text{ا}^2 \end{vmatrix} \quad -ع_1 + ع_2 ،\ -ع_1 + ع_3$$

$$\begin{vmatrix} \text{٠} & \text{٠} & \text{١} \\ \text{جـ - ا} & \text{ب - جـ} & \text{ا} \\ \text{جـ}^2 - \text{ا}^2 & \text{ب}^2 - \text{ا}^2 & \text{ا}^2 \end{vmatrix}$$

اخذ (ب - ا) عامل مشترك

اخذ (جـ - ا) عامل مشترك

$$(\text{ب - ا})\,(\text{جـ - ا}) \begin{vmatrix} \text{٠} & \text{٠} & \text{١} \\ \text{١} & \text{١} & \text{ا} \\ \text{جـ + ا} & \text{ب + ا} & \text{ا}^2 \end{vmatrix} \quad -ع_2 + ع_3$$

$$(\text{ب - ا})\,(\text{جـ - ا}) \begin{vmatrix} \text{٠} & \text{٠} & \text{١} \\ \text{١} & \text{١} & \text{ا} \\ \text{جـ - ب} & \text{ب + ا} & \text{ا}^2 \end{vmatrix}$$

= (ب - ا) (جـ - ا) (جـ - ب)

(٢١)
$$\begin{vmatrix} \text{ب}^2 & \text{جـ}^2 & \text{ب جـ} \\ \text{ا}^2 & \text{اجـ} & \text{جـ}^2 \\ \text{اب} & \text{ا}^2 & \text{ب}^2 \end{vmatrix} = \text{ا ب جـ} \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{جـ} & \text{ا} \\ \text{ا} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{جـ} & \text{ا} & \text{ب} \end{vmatrix}$$

بالضرب فى ا، ب، جـ

الوحدة الثالثة: المحددات والمصفوفات

(١٣) ا ب جـ مثلث $\overline{\text{ا ء}}$ ينصف ∠ب ا جـ

أثبت أن
$$\begin{vmatrix} \text{٥} & \text{٣} & \text{٢} \\ \text{اب + اجـ} & \text{اجـ} & \text{اب} \\ \text{ب جـ} & \text{ء جـ} & \text{ب ء} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

ا
ب ء جـ

(١٤) أثبت أن
$$\begin{vmatrix} \text{١} & \text{جتا}^2\text{س} & \text{جا}^2\text{س} \\ \text{١} & \text{جتا}^2\text{ص} & \text{جا}^2\text{ص} \\ \text{١} & \text{جتا}^2\text{ع} & \text{جا}^2\text{ع} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

باستخدام خواص المحددات حل المعادلات الآتية:

(١٥)
$$\begin{vmatrix} \text{س} & \text{١} & \text{س} \\ \text{٤} & \text{٣} & \text{٢} \\ \text{س} & \text{٥} & \text{س} \end{vmatrix} = \text{١٦}$$

(١٦)
$$\begin{vmatrix} \text{٠} & \text{-س} & \text{١} \\ \text{س} & \text{١} & \text{س} \\ \text{س + ١} & \text{-١} & \text{١} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{١} & \text{س}^2 \\ \text{س} & \text{-س} \end{vmatrix}$$

(١٧)
$$\begin{vmatrix} \text{١} & \text{-س} & \text{٢} \\ \text{٠} & \text{-١} & \text{١} \\ \text{س} & \text{١} & \text{س + ١} \end{vmatrix} = \text{٢ س + ١}$$

(١٨)
$$\begin{vmatrix} \text{٣س} & \text{٢س} & \text{س} \\ \text{س} & \text{٢س} & \text{٣س} \\ \text{٠} & \text{-س} & \text{س} \end{vmatrix} = \text{٩٦}$$

باستخدام خواص المحددات أثبت أن:

(١٩)
$$\begin{vmatrix} \text{١} & \text{١} & \text{١} \\ \text{جـ} & \text{ب} & \text{ا} \\ \text{جـ}^2 & \text{ب}^2 & \text{ا}^2 \end{vmatrix} = (\text{ب-ا})(\text{جـ-ا})(\text{جـ-ب})$$

(٢٠)
$$\begin{vmatrix} \text{٢ا} & \text{٢ا} & \text{ا - ب - جـ} \\ \text{٢ب} & \text{ب - جـ - ا} & \text{٢ب} \\ \text{جـ - ا - ب} & \text{٢جـ} & \text{٢جـ} \end{vmatrix} = (\text{ا + ب + جـ})^3$$

(٢١)
$$\begin{vmatrix} \text{ب}^2 & \text{جـ}^2 & \text{ب جـ} \\ \text{ا}^2 & \text{جـا} & \text{جـ}^2 \\ \text{اب} & \text{ا}^2 & \text{ب}^2 \end{vmatrix} = \text{ا ب جـ} \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{جـ} & \text{ا} \\ \text{ا} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{جـ} & \text{ا} & \text{ب} \end{vmatrix}$$

(٢٢)
$$\begin{vmatrix} \text{س} & \text{س} & \text{ص+ع} \\ \text{ص} & \text{ع+س} & \text{ص} \\ \text{س+ص} & \text{ع} & \text{ع} \end{vmatrix} = \text{٤ س ص ع}$$

(٢٣) بدون فك المحدد أثبت أن
$$\begin{vmatrix} \text{١} & \text{١} & \text{١} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{س} \\ \text{-ص} & \text{س} & \text{س} \end{vmatrix} = \text{س}^2 - \text{ص}^2$$

بدون فك المحدد أوجد قيمة:

(٢٤)
$$\begin{vmatrix} \text{٥} & \text{-١} & \text{٥} \\ \text{٤} & \text{٢} & \text{٤} \\ \text{٢} & \text{٢} & \text{-٥} \end{vmatrix}$$

(٢٥)
$$\begin{vmatrix} \text{٣} & \text{٢} & \text{١} \\ \text{٢} & \text{-٣} & \text{٢} \\ \text{-٥} & \text{٦} & \text{-٤} \end{vmatrix}$$

٧٦ الصف الثالث الثانوى - كتاب الطالب

المحددات ٣ - ١

بأستخدام خواص المحدودات أثبت أن:

(٢٦)
$$\begin{vmatrix} \text{٣س ص} & \text{س}^2 + \text{ص}^2 & (\text{س + ص})^2 \\ \text{٣ع ل} & \text{ع}^2 + \text{ل}^2 & (\text{ع + ل})^2 \\ \text{٣م ن} & \text{م}^2 + \text{ن}^2 & (\text{م + ن})^2 \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

(٢٧)
$$\begin{vmatrix} \text{-م} & \text{ل} & \text{٠} \\ \text{-ن} & \text{٠} & \text{-ل} \\ \text{٠} & \text{ن} & \text{م} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

(٢٨)
$$\begin{vmatrix} \text{س ص + ع ل} & \text{م ن} & \text{١} \\ \text{م ن + ع ل} & \text{س ص} & \text{١} \\ \text{س ص + م ن} & \text{ع ل} & \text{١} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

بدون فك المحدد أثبت أن:

(٢٩)
$$\begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ا} & \text{س} \\ \text{ا} & \text{س} & \text{ا} \\ \text{س} & \text{ا} & \text{ا} \end{vmatrix} = (\text{س + ٢ا})(\text{س - ا})^2$$

(٣٠)
$$\begin{vmatrix} \text{ص} & \text{س} & \text{١} \\ \text{ن ص} & \text{١ + س}^2 & \text{س} \\ \text{١ + ص}^2 & \text{س ص} & \text{ص} \end{vmatrix} = \text{١}$$

(٣١)
$$\begin{vmatrix} \text{-ع} & \text{-ص} & \text{س} \\ \text{٠} & \text{١} & \text{ص} \\ \text{١} & \text{٠} & \text{ع}^2 \end{vmatrix} = \text{س + ص}^2 + \text{ع}^3$$

(٣٢) بإستخدام خواص المحددات

أثبت أن
$$\begin{vmatrix} \text{٣} & \text{٤} & \text{٢} \\ \text{-٧} & \text{-١} & \text{-٥} \\ \text{٢} & \text{٥} & \text{١} \end{vmatrix} + \frac{١}{٤} \begin{vmatrix} \text{٢} & \text{٦} & \text{٤} \\ \text{١٠} & \text{٦} & \text{٨} \\ \text{٤} & \text{٩} & \text{٦} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

(٣٣) بدون فك المحددات أثبت أن :
$$\begin{vmatrix} \text{جـ} & \text{ب} & \text{ا} \\ \text{جـ} & \text{ا} & \text{ب} \\ \text{ا} & \text{جـ} & \text{ب} \end{vmatrix} = (\text{ا - ب})(\text{ا - جـ})(\text{ا + ب + جـ})$$

(٣٤) باستخدام خواص المحدودات

أثبت أن
$$\begin{vmatrix} \text{١} & \text{اب} & \text{ب جـ} \\ \text{ب} & \text{ب}^2 & \text{اجـ} \\ \text{ا} & \text{جـ} & \text{ب} \end{vmatrix} = (\text{ا + ب}) \begin{vmatrix} \text{١} & \text{ب} & \text{١} \\ \text{ب} & \text{ب}^2 & \text{ا} \\ \text{جـ} & \text{جـ}^2 & \text{ب} \end{vmatrix}$$

٧٧ كتاب الجبر والهندسة الفراغية - الجبر

٣٥ بدون فك المحدد أثبت أن:

$$\begin{vmatrix} \text{ا}^٢+١ & \text{اب} & \text{اجـ} \\ \text{اب} & \text{ب}^٢+١ & \text{ب جـ} \\ \text{اجـ} & \text{ب جـ} & \text{جـ}^٢+١ \end{vmatrix} = \text{ا}^٢+\text{ب}^٢+\text{جـ}^٢+١$$

٣٦ بدون فك المحددات أثبت أن:

$$\begin{vmatrix} ١+\text{ا} & ١ & ١ \\ ١ & ١+\text{ب} & ١ \\ ١ & ١ & ١+\text{جـ} \end{vmatrix} = \text{ا ب جـ}\left(\frac{١}{\text{ا}}+\frac{١}{\text{ب}}+\frac{١}{\text{جـ}}+١\right)$$

٣٧ إذا كان

$$\begin{vmatrix} \text{ا}^٣-١ & \text{ا}^٢ & \text{ا} \\ \text{ب}^٣-١ & \text{ب}^٢ & \text{ب} \\ \text{جـ}^٣-١ & \text{جـ}^٢ & \text{جـ} \end{vmatrix} = \text{صفر} \quad \text{حيث ا} \neq \text{ب} \neq \text{جـ}$$

أثبت أن ا ب جـ = ١

٣٨ بدون فك المحدد أثبت أن

$$\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ \text{ا} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{ب جـ} & \text{جـا} & \text{اب} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & \text{ا} & \text{ا}^٢ \\ ١ & \text{ب} & \text{ب}^٢ \\ ١ & \text{جـ} & \text{جـ}^٢ \end{vmatrix}$$

٣٩ بدون فك المحدد أثبت أن

$$\begin{vmatrix} \text{ا} & -\text{ب} & -\text{جـ} \\ \text{ب} & ١ & ٠ \\ \text{جـ}^٢ & ٠ & ١ \end{vmatrix} = \text{ا}+\text{ب}^٢+\text{جـ}^٣$$

٤٠ بدون فك المحدد أثبت أن

$$\begin{vmatrix} \text{ب جـ} & \text{ا}^٢ & \text{ا}^٢ \\ \text{ب}^٢ & \text{جـا} & \text{ب}^٢ \\ \text{جـ}^٢ & \text{جـ}^٢ & \text{اب} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ب جـ} & \text{اب} & \text{جـا} \\ \text{ا ب} & \text{جـا} & \text{ب جـ} \\ \text{ا جـ} & \text{ب جـ} & \text{اب} \end{vmatrix}$$

$$\frac{١}{\text{ا ب جـ}} \begin{vmatrix} \text{ا ب جـ} & \text{ا جـ}^٢ & \text{ا ب}^٢ \\ \text{ب جـ}^٢ & \text{ب ا جـ} & \text{ب ا}^٢ \\ \text{ب}^٢\text{جـ} & \text{جـ ا}^٢ & \text{جـ ا ب} \end{vmatrix}$$

باستخراج العامل المشترك ب جـ من $ع_١$

ا جـ من $ع_٢$ ، ا ب من $ع_٣$

$$\text{ا ب جـ} \begin{vmatrix} \text{ا} & \text{جـ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{ب} & \text{ا} \\ \text{ب} & ٢ & \text{جـ} \end{vmatrix}$$

٢٧ $\Delta \begin{vmatrix} ٠ & \text{ل} & -\text{م} \\ -\text{ل} & ٠ & -\text{ن} \\ \text{م} & \text{ن} & ٠ \end{vmatrix}$ بإبدال الصفوف والأعمدة

$\Delta = -١ \times -١ \times -١ \begin{vmatrix} ٠ & -\text{ل} & ٢ \\ \text{ل} & ٠ & \text{ن} \\ -\text{م} & -\text{ن} & ٠ \end{vmatrix}$ بإبدال الصفوف والأعمدة

$$\Delta = - \begin{vmatrix} ٠ & \text{ل} & -\text{م} \\ -\text{ل} & ٠ & -\text{ن} \\ \text{م} & \text{ن} & ٠ \end{vmatrix} = -\Delta$$

$\therefore ٢\Delta = \text{صفر}$ $\qquad \therefore \Delta = \text{صفر}$

٢٨ $$\Delta = \begin{vmatrix} ١ & \text{م ن} & \text{س ص}+\text{ع ل} \\ ١ & \text{س ص} & \text{م ن}+\text{ع ل} \\ ١ & \text{ع ل} & \text{س ص}+٢\text{ن} \end{vmatrix}$$

$-ص_١ + ص_٢$، $-ص_١ + ص_٣$

$$\Delta = \begin{vmatrix} ١ & \text{م ن} & \text{س ص}+\text{ع ل} \\ ٠ & \text{س ص}-\text{م ن} & \text{م ن}+\text{س ص} \\ ٠ & ٤\text{ل}-\text{م ن} & \text{م ن}+\text{ع ل} \end{vmatrix}$$

يأخذ عامل مشترك (س ص - م ن) ، ع ل - م ن

$$\Delta = (\text{س ص}-\text{م ن})(\text{ع ل}-\text{م ن}) \begin{vmatrix} ١ & \text{م ن} & \text{س ص}+\text{ع ل} \\ ٠ & ١ & -١ \\ ٠ & ١ & -١ \end{vmatrix}$$

= صفر تساوى $ص_٢$، $ص_٣$

٣٠ $$\begin{vmatrix} ١ & \text{س} & \text{ص} \\ \text{س} & ١+\text{س}^٢ & \text{س ص} \\ \text{ص} & \text{س ص} & ١+\text{ص}^٢ \end{vmatrix}$$

· س $ص_١ + ص_٢$

· ص $ص_١ + ص_٣$

$$\begin{vmatrix} ١ & \text{س} & \text{ص} \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{vmatrix} = ١$$

٣٢ $$\begin{vmatrix} ٢ & ٤ & ٣ \\ -٥ & -١ & -٧ \\ ١ & ٥ & ٢ \end{vmatrix} + \frac{١}{٤} \times ٢ \times ٢ \begin{vmatrix} ٢ & ٦ & ١ \\ ٤ & ٦ & ٥ \\ ٣ & ٩ & ٢ \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} ٢ & ٤ & ٣ \\ -٥ & -١ & ٥ \\ ١ & ٥ & ٢ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٢ & ٦ & ١ \\ ٤ & ٦ & ٥ \\ ٣ & ٩ & ٢ \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} ٢ & -٥ & ١ \\ -٥ & -١ & ٥ \\ ١ & -٧ & ٢ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٢ & ٦ & ١ \\ ٤ & ٦ & ٥ \\ ٣ & ٩ & ٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ١ \\ ٤ & ٥ & ٥ \\ ٣ & ٢ & ٢ \end{vmatrix}$$

= صفر تساوى $ع_٢$، $ع_٣$

الوحدة الثالثة

٣ - ٢

المصفوفات

Matrices

المــصــفـوفـات

Matrices

سوف تتعلم

- مصفوفة العوامل المرافقة.
- المعكوس الضربى لمصفوفة مربعة على نظم ٣ × ٣.
- حل معادلة خطية باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة.
- خواص المحددات.
- حل مسائل متنوعة مستخدمًا خواص المحددات.
- المعادلات الخطية المتجانسة وغير المتجانسة.
- مرتبة مصفوفة المعادلات.
- مرتبة مصفوفة المعاملات الموسعة.
- العلاقة بين مرتبة مصفوفة المعاملات و مصفوفة المعاملات الموسعة وإمكانية الحل.

مصطلحات أساسية

- معكوس ضربى للمصفوفة *Inveres of a Matrix*
- العوامل المرافقة *Adioient element*
- المصفوفة الملحقة *Adjoint matrix*

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية *Scientific Calculator*

تمهيد

تعرفت فيما سبق بأن المصفوفة هى مجموعة من العناصر موضوعة فى جدول مرتبة م صفًا، ن عمودًا د محاطة بقوسين على الصورة (   ) ويرمز لها بأحد الحروف الهجائية و يكتب نظم المصفوفة على الصورة م × ن

المصفوفة أ $= \begin{pmatrix} ٣ & ٢- \\ ٥ & ١ \end{pmatrix}$ مصفوفة مربعة على النظم ٢ × ٢

كذلك المصفوفة ب $= \begin{pmatrix} ٥ & ٢ & ٣ \\ ٠ & ٤ & ١- \\ ٢ & ١ & ٦ \end{pmatrix}$ مصفوفة مربعة على النظم ٣ × ٣

بينما المصفوفة $\begin{pmatrix} ١ & ٢- & ٠ \\ ٥ & ٤ & ٣ \end{pmatrix}$ مصفوفة على النظم ٢ × ٣

وتستخدم المصفوفات بشكل تطبيقى فى التحويلات الخطية وفي حل نظام من المعادلات الخطية كما تستخدم فى مجالات عديدة فى العلوم المختلفة كالميكانيكا ومعظم فروع الفيزياء والرسوم البيانية المعدة بالكمبيوتر وفى الاحصاء ونظرية الاحتمالات.

المعكوس الضربى للمصفوفة *Inveres of a Matrix*

سبق أن درست كيفية إيجاد المعكوس الضربى (إن وجد) للمصفوفة المربعة من النظم ٢ × ٢ **وعلمت أن:**

إذا كان أ، ب مصفوفتين مربعتين على النظم ٢ × ٢ **وكان** أ ب = ب أ = I **فإن** ب تسمى معكوسًا ضربيًّا للمصفوفة أ كل من أ ، ب معكوسًا ضربيًا للأخرى .

أى أن $أ^{-1}$ = أ $أ^{-1}$ = أ = I

مع ملاحظة أن بعض المصفوفات ليس لها معكوسًا ضربيًّا.

فإذا كان أ = $\begin{pmatrix} أ & ب \\ جـ & ء \end{pmatrix}$ فإن المعكوس الضربى للمصفوفة أ يكون معرفًا عندما يكون محدد أ = $\Delta \neq ٠$ فإن:

$$أ^{-1} = \frac{١}{\Delta} \begin{pmatrix} ء & -ب \\ -جـ & أ \end{pmatrix}$$

تذكر أن

مصفوفة الوحدة I هى مصفوفة مربعة جميع عناصر قطرها الرئيسى ١ وباقى العناصر أصفار

$I_{٢} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$

$I_{٣} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$

خلفية:

سبق وأن درس الطالب المصفوفات والعمليات عليها وهى عمليات الجمع والطرح فى المصفوفات وتعرف على المصفوفة المربعة ٢ × ٢ وسوف نستكمل دراسة المصفوفات من خلال عرض فى البيانات والتعرف على مصفوفة العوامل المرافقة والمصفوفة ٣ × ٣ والمعكوس الضربى لها.

وحل مسائل متنوعة على المصفوفات باستخدام المحددات والتعرف على خواص معكوس المصفوفة.

أهداف الدرس:

- يتعرف مصفوفة العوامل المرافقه.
- يوجد المعكوس الضربى لمصفوفة على نظام ٣ × ٣
- يتعرف المصفوفة المرافقه.
- يوجد معكوس المصفوفة المربعة من النظم ٣ × ٣
- يتعرف على خواص معكوس المصفوفة.

مفردات أساسية:

المصفوفة - المرتبة - المصفوفة المربعة - المصفوفة الملحقة - المعكوس الضربى للمصفوفة، خواص المحددات.

المواد التعليمية المستخدمة:

السبورة التعليمية - أقلام - آلة حاسبة علمية

طرق التدريس المقترحة

العرض المباشر - المناقشة - العصف الذهنى - حل المشكلات - الاكتشاف

مكان التدريس:

الفصل الدراسى

مصادر التعلم:

كتاب الطالب من ص(٧٩) إلى ص(٨٥)

الشبكة الدولية المعلومات (الانترنت)

التهيئة:

- استرجع مع طلابك المقصود بالمصفوفة ومدى أهمية المصفوفات فى الحياه العملية.
- كلف طلابك بإعداد بيانات على برنامج الأكسل الحاسوبى وكيف ننظمها على شكل مصفوفة وكيفية إيجاد نتائج تساعدنا فى إتخاذ القرار؟

إجراءات الدرس:

- ناقش طلابك فى بند «فكر ناقش» ص(٨٦) واسأل الطلاب على مدى الاستفاده من وضع بيانات الجدول فى مصفوفه. وكيف تقرأ.
- اشرح لطلابك أن المصفوفه مكونه من (٣) صف، (٢) عمود ولذلك تتكون من النظم ٣ × ٢

مثال

(١) أوجد المعكوس الضربى إن وجد لكل من:

(أ) أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ ٣ & ٦ \end{pmatrix}$ (ب) ب = $\begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$

الحل

(أ) نوجد محدد المصفوفة $\triangle$ = $\begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ٣ & ٦ \end{vmatrix}$ = ١٢ - ١٢ = صفر

∴ لا يوجد معكوس ضربى للمصفوفة

(ب) نوجد محدد المصفوفة $\triangle$ = $\begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix}$ = ٦ - ٤ = ٢

∴ يوجد معكوس ضربى للمصفوفة و نرمز له بالرمز $ب^{-١}$ = $\frac{١}{٢}$ $\begin{pmatrix} ٣ & -٤ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix}$

حاول أن تحل

(١) أوجد قيم أ التى تجعل المصفوفة $\begin{pmatrix} أ & ٩ \\ ٤ & أ \end{pmatrix}$ ليس لها معكوس ضربى.

> **تذكر أن**
>
> إذا كان $\triangle \neq ٠$ فإن: للمصفوفة أ معكوس ضربيًا يتعين كالآتى:
>
> أ) تبادل بين وضعى العنصرين الواقعين على القطر الرئيس للمصفوفة أ.
>
> ب) نغير كلًّا من إشارتى العنصرين الواقعين على القطر الآخر للمصفوفة أ
>
> ج) نضرب المصفوفة الناتجة بعد إجراء (أ)، (ب) بالعدد $\frac{١}{\triangle}$ فنحصل على $أ^{-١}$

المعكوس الضربى للمصفوفة من النظم ٣ × ٣ *Inveres of a matrix of 3 × 3 systems*

إذا كان |أ| ≠ صفر أى أن محدد هذه المصفوفة لا يساوى صفرًا فإنه يوجد معكوس ضربى للمصفوفة أ و يرمز له بالرمز $أ^{-١}$ وهو مصفوفة مربعة أيضًا حيث أ $أ^{-١}$ = I ، حيث "I مصفوفة الوحدة"

> **أضف إلى معلوماتك**
>
> • المصفوفة المنفردة "الشاذة" هى المصفوفة التى ليس لها معكوس ضربى $\triangle$ = صفر
>
> • المصفوفة غير منفردة "غير الشاذة" هى المصفوفة التى لها معكوس ضربى $\triangle \neq$ صفر

مثال

(٢) حدد ما إذا كانت المصفوفة أ حيث أ = $\begin{pmatrix} ٣ & -١ & ٢ \\ -١ & ٢ & ١ \\ ١ & ٠ & -١ \end{pmatrix}$ لها معكوس ضربى أم لا؟ وضح إجابتك.

الحل

نوجه قيمة محدد المصفوفة المربعة أ على النحو الآتى:

|أ| = $\begin{vmatrix} ٣ & -١ & ٢ \\ -١ & ٢ & ١ \\ ١ & ٠ & -١ \end{vmatrix}$ = ٣ $\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & -١ \end{vmatrix}$ - (-١) $\begin{vmatrix} -١ & ١ \\ ١ & -١ \end{vmatrix}$ + ٢ $\begin{vmatrix} -١ & ٢ \\ ١ & ٠ \end{vmatrix}$

= ٣ (-٢ - ٠) + (١ - ١) + ٢ (٠ - ٢) = -٦ - ١ - ٤ = -١٠

∵ |أ| ≠ ٠ ∴ يوجد للمصفوفة معكوس ضربى أم لا؟

حاول أن تحل

(٢) حدد هل للمصفوفة ب = $\begin{pmatrix} ٤ & -٣ & ٢ \\ ٠ & ٢ & ١ \\ ١ & ١ & ٠ \end{pmatrix}$ معكوس ضربى؟

التقييم المستمر: المناقشة والحوار

- ناقش طلابك ما ورد فى بند حاول أن تحل وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة.

إجابة حاول أن تحل ص (٨٠)

(١) ∵ المصفوفة ليس لها معكوس ضربى

$\begin{vmatrix} أ & ٩ \\ ٤ & أ \end{vmatrix} \neq ٠$

∴ $أ^{٢}$ - ٤ × ٩ ≠ ٠

∴ $أ^{٢}$ ≠ ± ٦

المعكوس الضربى للمصفوفة:

ارشادات للدراسة:

- لاحظ تبديل موقعى عنصرى القطر الرئيسى وتغيير إشارتى عنصرى القطر الآخر عند حساب المعكوس الضربى للمصفوفه.
- أكد على أن بعض المصفوفات لايوجد لها معكوسًا ضربيًا فى حالة إذا كان محدد المصفوفه يساوى صفر.
- وضح لطلابك كيفية إيجاد المعكوس الضربى للمصفوفه من خلال (بند) تذكر ص(٨٠).

تمرين إضافى

حدد ما إذا كان كل زوج من المصفوفات التالية يمثل مصفوفه ومعكوسها الضربى أم لا؟

(أ) أ = $\begin{pmatrix} ٣ & -٢ \\ -١ & ١ \end{pmatrix}$ ب = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$

الإجابة: نعم، كل منهما معكوس ضربى للأخر

(ب) م = $\begin{pmatrix} ٣ & -١ \\ ٤ & -٢ \end{pmatrix}$ ن = $\begin{pmatrix} ١ & -٣ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix}$

الإجابة: لا، لا تمثل أى منهما معكوسًا ضربيًا للآخر.

- وضح لطلابك أن مصفوفة الوحدة هى مصفوفه مربعة يكون كل عنصر من عناصر قطرها الرئيس ١، وتكون بقيه العناصر أصفارًا.

استخدام التكنولوجيا:

- اطلب إلى طلابك توضيح ما الذى يعنيه عدم وجود معكوس ضربى لمصفوفه المعاملات فى نظام من المعادلات.
- ناقش طلابك فى هذا البحث و يتوصل معهم إلى مفاهيم و إجراءات يمكن تدوينها فى بحث ورقى أو عرضها من خلال العرض التقديمى أثناء شرح هذا الدرس.

التقييم: المناقشة والحوار

¤ ناقش طلابك فى بند حاول أن تحل وتوصل معهم للإجابات الصحيحة.

(٢)
$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} ٤ & ٠ \\ ٦ & ٣ \end{vmatrix} + & \begin{vmatrix} ٥ & ٠ \\ ٧ & ٣ \end{vmatrix} - & \begin{vmatrix} ٥ & ٤ \\ ٧ & ٦ \end{vmatrix} + \\ \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٦ & ٣ \end{vmatrix} - & \begin{vmatrix} ٣- & ٢ \\ ٧ & ٣ \end{vmatrix} + & \begin{vmatrix} ٣- & ١ \\ ٧ & ٦ \end{vmatrix} - \\ \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٤ & ٠ \end{vmatrix} + & \begin{vmatrix} ٣- & ٢ \\ ٥ & ٠ \end{vmatrix} - & \begin{vmatrix} ٣- & ١ \\ ٥ & ٤ \end{vmatrix} + \end{pmatrix}$$

المعكوس الضربى للمصفوفة من النظام ٣ × ٣

¤ استرجع مع طلابك خواص المحددات قبل البدء فى عرض موضوع المعكوس الضربى للمصفوفة من النظام ٣ × ٣

¤ وضح لطلابك أنه بما أن المصفوفة المربعة لايوجد لها معكوسًا ضربيًا فى حالة ما إذا كان $\triangle \neq$ ٠ فإن ذلك ينطبق على المصفوفة من النظام ٣ × ٣

¤ خطوات معرفه ما إذا كانت المصفوفة من النظام ٣ × ٣ لها معكوسًا ضربيًا:

(أ) نوجد قيمة المحدد | أ | (للمصفوفة المعطاه).

(ب) نحسب قيمة المحدد فإذا ظهر قيمة المحدد | أ | ≠ ٠ فإنه يوجد للمصفوفة معكوسًا ضربيًا.

التقييم المستمر: المناقشة والحوار

ناقش مع طلابك ما ورد فى بند حاول أن تحل وتوصل معهم للإجابة الصحيحة.

(٣) **تفكير ناقد**

$$\begin{pmatrix} ٦- & ١٥ & ٧ \\ ١- & ٢ & ١ \\ ٤ & ١٠- & ٥- \end{pmatrix} = أ^{مل}$$

$$\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ١- \\ ٠ & ١- & ٠ \\ ١- & ٠ & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦- & ١٥ & ٧ \\ ١- & ٢ & ١ \\ ٤ & ١٠- & ٥- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٣ & ٠ & ٢ \\ ١- & ٢ & ١- \\ ١ & ٥ & ٠ \end{pmatrix} = أ\,أ^{مل}$$

$$\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ١- \\ ٠ & ١- & ٠ \\ ١- & ٠ & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & ٠ & ٢ \\ ١- & ٢ & ١- \\ ١ & ٥ & ٠ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٦- & ١٥ & ٧ \\ ١- & ٢ & ١ \\ ٤ & ١٠- & ٥- \end{pmatrix} = أ^{مل}\,أ$$

$$١- = (٥-)\,٣ + (٧)\,٢ = \begin{vmatrix} ٣ & ٠ & ٢ \\ ١- & ٢ & ١- \\ ١ & ٥ & ٠ \end{vmatrix} = |أ|$$

$$\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ١- \\ ٠ & ١- & ٠ \\ ١- & ٠ & ٠ \end{pmatrix} = I \times |أ|$$

العوامل المرافقة *Adjoimt Factors*

إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} أ_{٣١} & أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٣٢} & أ_{٢٢} & أ_{١٢} \\ أ_{٣٣} & أ_{٢٣} & أ_{١٣} \end{pmatrix}$ مصفوفة على النظم ٣ × ٣ ومحددها | أ |، فإن:

العامل المرافق للعنصر $أ_{ص\,ع}$ هو قيمة المحدد الأصغر المقابل للعنصر $أ_{ص\,ع}$ والناتج من حذف الصف والعمود واللذان يقع فى تقاطعهما العنصر $أ_{ص\,ع}$ مضروبًا فى $(-١)^{ص+ع}$ على ذلك تكون مصفوفة المرافقات للمصفوفة أهى:

$$م = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{٢٢} \\ أ_{٣١} & أ_{٢٣} \end{vmatrix} (-١)^{١+٣} & \begin{vmatrix} أ_{١٢} & أ_{٣١} \\ أ_{١٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix} (-١)^{١+٢} & \begin{vmatrix} أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix} (-١)^{١+١} \\ \begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} \end{vmatrix} (-١)^{٢+٣} & \begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{٣٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix} (-١)^{٢+٢} & \begin{vmatrix} أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix} (-١)^{٢+١} \\ \begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} \end{vmatrix} (-١)^{٣+٣} & \begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{٣١} \\ أ_{١٢} & أ_{٣٢} \end{vmatrix} (-١)^{٣+٢} & \begin{vmatrix} أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \end{vmatrix} (-١)^{٣+١} \end{pmatrix}$$

مثال

(٣) أوجد مصفوفة المرافقات للمصفوفة أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٢ & ٣ & ٢ \\ ٢ & ٢ & ١ \end{pmatrix}$

الحل

نوجد العوامل المترافقة للمصفوفة أ على النحو التالى:

$أ_{١١} = (-١)^{١+١} \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٢ & ٢ \end{vmatrix} = ٢$ ، $أ_{٢١} = (-١)^{١+٢} \begin{vmatrix} ٢ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} = -٢$ ، $أ_{٣١} = (-١)^{١+٣} \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} = ١$

$أ_{١٢} = (-١)^{٢+١} \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ٢ \end{vmatrix} = ٢$ ، $أ_{٢٢} = (-١)^{٢+٢} \begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} = -١$ ، $أ_{٣٢} = (-١)^{٢+٣} \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٢ & ٢ \end{vmatrix} = ٠$

$أ_{١٣} = (-١)^{٣+١} \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix} = -٥$ ، $أ_{٢٣} = (-١)^{٣+٢} \begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٢ \end{vmatrix} = ٤$ ، $أ_{٣٣} = (-١)^{٣+٣} \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} = -١$

ومن الملاحظ أن الإشارات التى أعطت المحددات العناصر لتكوين المعاملات المرافقة تتبع جدول الإشارات التالى:

$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$ المكان الذى يحتله العنصر المراد الحصول على معامله المرافق فى المصفوفة أ

لذلك فإن مصفوفة المرافقات هى: م = $\begin{pmatrix} ١ & ٢- & ٢ \\ ٠ & ١- & ٢ \\ ١- & ٤ & ٥- \end{pmatrix}$

حاول أن تحل

(٣) أوجد مصفوفة المرافقات للمصفوفة أ = $\begin{pmatrix} ٣- & ١ & ٢ \\ ٥ & ٤ & ٠ \\ ٧ & ٦ & ٣ \end{pmatrix}$

المصفوفة الملحقة *Adjoint matrix*

تسمى المصفوفة الناتجة من إيجاد مدور مصفوفة العوامل المرافقة لعناصر المصفوفة أ بالمصفوفة الملحقة للمصفوفة أ و يرمز لها بالرمز $(أ)^{مل}$

$$(أ)^{مل} = \begin{pmatrix} \overline{أ}_{٣١} & \overline{أ}_{٢١} & \overline{أ}_{١١} \\ \overline{أ}_{٣٢} & \overline{أ}_{٢٢} & \overline{أ}_{١٢} \\ \overline{أ}_{٣٣} & \overline{أ}_{٢٣} & \overline{أ}_{١٣} \end{pmatrix}$$

نلاحظ أن $أ^{مل} أ = أ أ^{مل} = |أ| I$

معلومة إثرائية:

للتحقق من النظير أو المعكوس الضربى:

بما أن عملية ضرب المصفوفات عملية ليست ابدالية، فمن الضرورى التأكد من الضرب فى الاتجاهين.

تمرين إضافى:

حدد ما إذا كان كل زوج من المصفوفات الآتية يمثل مصفوفه ومعكوسها الضربى أم لا؟

$$\begin{pmatrix} ٤- & ٢ \\ ٢- & ١ \end{pmatrix} = ع \qquad \qquad \begin{pmatrix} \frac{١}{٤} & \frac{١}{٢}- \\ \frac{١}{٤} & ١- \end{pmatrix} = م$$

مع ملاحظة أن:

كل من المصفوفتين م، ع تمثلان معكوسًا ضربيًا للآخر إذا و إذا فقط كان:

حاصل ضرب المصفوفتين يساوى مصفوفه الوحدة: م • ع = I

المصفوفة الملحقة:

خطوات إيجاد المصفوفة الملحقة:

¤ نوجد مصفوفة المرافقات للمصفوفة المطلوبة.

- تكتب إشارات المصفوفة الناتجة.
- ومنها نحصل على المصفوفة الملحقة.

ويرمز لها بالرمز $(\text{أ})^{\text{مل}}$

إيجاد معكوس المصفوفة المربعة من النظم ٣ × ٣

- استرجع مع طلابك كيفية إيجاد محدد المصفوفة.

ملاحظة أن محدد المصفوفة ≠ ٠

- تأكد مع طلابك استيعابهم لكيفية إيجاد مصفوفة العوامل المرافقة.
- تأكد من أن طلابك استوعبوا كيفية إيجاد المصفوفة الملحقة $(\text{أ})^{\text{مل}}$ لمصفوفة العوامل المرافقة.
- أوجد مع طلابك المعكوس الضربى للمصفوفة من العلاقة $\text{أ}^{-1} = \frac{1}{|\text{أ}|} \times \text{أ}^{\text{مل}}$
- استرجع مع طلابك المعكوس الضربى للمصفوفة على الصورة

$$\text{أ}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \text{ء} & -\text{ب} \\ -\text{جـ} & \text{أ} \end{pmatrix}$$

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

- ناقش طلابك فى بند حاول أن تحل وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة.

المعكوس الضربى لكل المصفوفين ب ، أ

أولًا: المصفوفة ب

|ب| = صفر ∴ ليس لها معكوس ضربى

ثانيًا: المصفوفة أ

$$|\text{أ}| = \begin{vmatrix} ٠ & -١ & ١ \\ ١ & ٢ & ٤ \\ ٢ & ٣ & ٨ \end{vmatrix} = + ١(٨ - ٨) + ١(٣ - ٤) = -١$$

$$\text{مصفوفة العوامل المرافقة} \begin{pmatrix} ٤ & \text{صفر} & -١ \\ ١١ & -٢ & -٢ \\ -٦ & ١ & ١ \end{pmatrix}$$

$$\text{أ}^{\text{مل}} = \begin{pmatrix} ٤ & ١١ & -٦ \\ ٠ & -٢ & ١ \\ -١ & -٢ & ١ \end{pmatrix}$$

$$\text{أ}^{-1} = \frac{1}{|\text{أ}|} \times \text{أ}^{\text{مل}} = \frac{1}{-1} \times \begin{pmatrix} ٤ & ١١ & -٦ \\ ٠ & -٢ & ١ \\ -١ & -٢ & ١ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -٤ & -١١ & ٦ \\ ٠ & ٢ & -١ \\ ١ & ٢ & -١ \end{pmatrix}$$

ففى المثال السابق تكون $(\text{أ})^{\text{مل}} = \begin{pmatrix} ٢ & ٢ & -٥ \\ -٢ & -١ & ٤ \\ ١ & ٠ & -١ \end{pmatrix}$

مثال

٤ أوجد المصفوفة الملحقة للمصفوفة $\text{ب} = \begin{pmatrix} ٢ & ٠ & ٣ \\ -١ & ٢ & -١ \\ ٠ & ٥ & ١ \end{pmatrix}$

الحل

نوجد مصفوفة المرافقات للمصفوفة

$$\text{ب} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ ٥ & ١ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -١ & -١ \\ ٠ & ١ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -١ & ٢ \\ ٠ & ٥ \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} ٠ & ٣ \\ ٥ & ١ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٠ & ١ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & ٥ \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} ٠ & ٣ \\ ٢ & -١ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & -١ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ٢ & ٠ \\ -١ & ٢ \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٧ & ١ & -٥ \\ ١٥ & ٢ & -١٠ \\ -٦ & -١ & ٤ \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{ب}^{\text{مل}} = \begin{pmatrix} ٧ & ١٥ & -٦ \\ ١ & ٢ & -١ \\ -٥ & -١٠ & ٤ \end{pmatrix}$$

تفكير ناقد من المثال السابق أوجد قيمة كل من: ب $\text{ب}^{\text{مل}}$ ، $\text{ب}^{\text{مل}}$ب ماذا تلاحظ ؟

إيجاد معكوس المصفوفة المربعة من النظم ٣×٣ *Finding invers of asquare matrix*

لإيجاد المعكوس الضربى لمصفوفة أ التى على النظم ٣×٣ باستخدام مصفوفة العوامل المرافقة من الممكن أن نتبع الخطوات التالية:

- نوجِد محدد المصفوفة أ مع ملاحظة |أ| ≠ صفر
- نُكوِّن مصفوفة العوامل المرافقة لكل عنصر من عناصر المصفوفة أ
- نوجِد المصفوفة الملحقة $\text{أ}^{\text{مل}}$ (مصفوفة العوامل المرافقة)
- نوجِد المعكوس الضربى للمصفوفة أ من العلاقة

$$\text{أ}^{-1} = \frac{1}{|\text{أ}|} \times \text{أ}^{\text{مل}}$$

مثال

٥ أوجد المعكوس الضربى للمصفوفة $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٢ & -١ & ٣ \\ ٤ & ٣ & ٥ \\ ١ & ٤ & ٠ \end{pmatrix}$

الحل

نوجد محدد المصفوفة أ باستخدام عناصر الصف الأول "إختيارى"

$$|\text{أ}| = \begin{vmatrix} ٢ & -١ & ٣ \\ ٤ & ٣ & ٥ \\ ١ & ٤ & ٠ \end{vmatrix} = ٢(٠ - ٢٠) + ١(٠ - ٥) + ٣(١٦ - ٣) = -٤٠ - ٥ + ٣٩ = -٦$$

نوجد مصفوفة العوامل المرافقة

$$= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} ٣ & ٥ \\ ٤ & ٠ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ٤ & ٥ \\ ١ & ٠ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ٤ & ٣ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -١ & ٣ \\ ٤ & ٠ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٠ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -١ & ٣ \\ ٣ & ٥ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ ٤ & ٣ \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -٢٠ & ٥ & ١٣ \\ ١٢ & -٣ & -٩ \\ -١٤ & ٢ & ١٠ \end{pmatrix}$$

نوجد $\text{أ}^{\text{مل}}$ "مدور مصفوفة العوامل المرفقة"

$$\text{أ}^{\text{مل}} = \begin{pmatrix} -٢٠ & ١٢ & -١٤ \\ ٥ & -٣ & ٢ \\ ١٣ & -٩ & ١٠ \end{pmatrix} \quad \text{فيكون } \text{أ}^{-1} = \frac{1}{|\text{أ}|} \times \text{أ}^{\text{مل}} = \frac{1}{-6}\begin{pmatrix} -٢٠ & ١٢ & -١٤ \\ ٥ & -٣ & ٢ \\ ١٣ & -٩ & ١٠ \end{pmatrix}$$

حاول أن تحل

٤ أوجد المعكوس الضربى لكل المصفوفات الآتية:

إن وجد $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٠ & -١ & ١ \\ ١ & ٢ & ٤ \\ ٢ & ٣ & ٨ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} ٥ & ٠ & ٠ \\ ٧ & ٢ & -٢ \\ ٢ & -٣ & ٣ \end{pmatrix}$

بعض خواص معكوس المصفوفة: *Some properties of inverse of a matrix*

إذا كانت أ، ب مصفوفتان غير منفردتين فإن:

١ $(\text{أ ب})^{-1} = \text{ب}^{-1}\,\text{أ}^{-1}$

٢ $(\text{أ}^{-1})^{-1} = \text{أ}$ (معكوس معكوس المصفوفة أ = المصفوفة أ)

٣ $(\text{أ}^{-1})^{\text{مد}} = (\text{أ}^{\text{مد}})^{-1}$ (مدور المعكوس = معكوس المدور)

٤ $(\text{أ}^{-1})^{2} = (\text{أ}^{2})^{-1}$ (مربع المعكوس = معكوس المربع)

٥ $(I)^{-1} = I$ (معكوس مصفوفه الوحدة = مصفوفة الوحدة)

تذكر أن

المصفوفة المنفردة: محددها = صفر

المصفوفة غير المنفردة: محددها ≠ صفر

مثال

٦ إذا كانت: $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٣ & -١ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$، $\text{ب} = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٥ \end{pmatrix}$ فحقق الخواص التالية:

أولًا: $(\text{أ ب})^{-1} = \text{ب}^{-1}\,\text{أ}^{-1}$ **ثانيًا:** $(\text{أ}^{-1})^{-1} = \text{أ}$

الحل

|أ| = ٣ × ٢ - (-١) = ٧ ، |ب| = ٢ × ٥ - ١ (-١) = ١١

$\text{أ}^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب}^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} ٥ & -١ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$

أخطاء شائعة

قد يخطىء بعض الطلاب فى إيجاد معكوس المصفوفة المربعة من النظم ٣ × ٣ وذلك لخطأه أثناء إيجاد مصفوفة العوامل المرافقة أو المصفوفة الملحقة، فيجب التأكيد إلى الطلاب أثناء الحل أن يراجعو كل خطوة للتأكد من الحسابات لأن الخطأ فى أى خطوه يؤثر على الخطوات التى تليها.

بند تفكير ناقد ص (٩٠)

يهدف هذا التفكير على التأكيد على أن:

$$أ^{مل}\,أ = أ\,أ^{مل} = |أ|\,I$$

حل التفكير:

$$أ^{مل} = \begin{pmatrix} ٧ & ١٥ & -٦ \\ ١ & ٢ & -١ \\ -٥ & -١٠ & ٤ \end{pmatrix}$$

$$أ\,أ^{مل} = \begin{pmatrix} ٣ & ٠ & ٢ \\ -١ & ٢ & -١ \\ ١ & ٥ & ٠ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -٦ & ١٥ & ٧ \\ -١ & ٢ & ١ \\ ٤ & -١٠ & -٥ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & -١ \\ ٠ & -١ & ٠ \\ -١ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$$

$$أ^{مل}\,أ = \begin{pmatrix} -٦ & ١٥ & ٧ \\ -١ & ٢ & ١ \\ ٤ & -١٠ & -٥ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٣ & ٠ & ٢ \\ -١ & ٢ & -١ \\ ١ & ٥ & ٠ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & -١ \\ ٠ & -١ & ٠ \\ -١ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$$

$$|أ| = \begin{vmatrix} ٣ & ٠ & ٢ \\ -١ & ٢ & -١ \\ ١ & ٥ & ٠ \end{vmatrix} =$$

$$= ٢\,(٧) + ٣\,(-٥) = -١$$

$$|أ| \times I = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & -١ \\ ٠ & -١ & ٠ \\ -١ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$$

نلاحظ أن $أ^{مل}\,أ = أ\,أ^{مل} = |أ|\,I$

الوحدة الثالثة: المحددات والمصفوفات

أولًا:

$$أ\,ب = \begin{pmatrix} ٣ & -١ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ & -٢ \\ ٠ & ١١ \end{pmatrix}$$

$\therefore\ |أ\,ب| = ٧٧$

$\therefore\ (أ\,ب)^{-١} = \frac{١}{٧٧}\begin{pmatrix} ١١ & ٢ \\ ٠ & ٧ \end{pmatrix}$ (١)

$ب^{-١}\,أ^{-١} = \frac{١}{١١}\begin{pmatrix} ٥ & -١ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix} \times \frac{١}{٧}\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix}$

$= \frac{١}{٧٧}\begin{pmatrix} ١١ & ٢ \\ ٠ & ٧ \end{pmatrix}$ (٢)

من (١)، (٢) $\therefore\ (أ\,ب)^{-١} = ب^{-١}\,أ^{-١}$

ثانيًا:

$$أ^{-١} = \frac{١}{٧}\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{٢}{٧} & \frac{١}{٧} \\ \frac{-١}{٧} & \frac{٣}{٧} \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ |أ^{-١}| = \frac{٢}{٧} \times \frac{٣}{٧} + \frac{١}{٧} \times \frac{١}{٧}$$

$$= \frac{٦}{٤٩} + \frac{١}{٤٩} = \frac{١}{٧}$$

$$\therefore\ (أ^{-١})^{-١} = ٧\begin{pmatrix} \frac{٣}{٧} & -\frac{١}{٧} \\ \frac{١}{٧} & \frac{٢}{٧} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix} = أ$$

أى أن $(أ^{-١})^{-١} = أ$

حاول أن تحل

٥ فى المثال السابق تحقق من الخواص الآتية:

أولًا: $(أ^{-١})^{مد} = (أ^{مد})^{-١}$ ثانيًا: $(أ^{-١})^{٢} = (أ^{٢})^{-١}$

تمارين (١ – ٢)

أولًا: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات الآتية:

١ المصفوفة المنفردة من بين المصفوفات التالية هى:

أ $\begin{pmatrix} ٣ & ٤ \\ ٥ & ٦ \end{pmatrix}$ ب $\begin{pmatrix} ٣ & -٢ \\ ٦ & -٤ \end{pmatrix}$ ج $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix}$ د $\begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ -٣ & ٦ \end{pmatrix}$

٢ قيمة س التى تجعل المصفوفة $\begin{pmatrix} س & ١ \\ -٤ & ٢ \end{pmatrix}$ منفردة هى:

أ -٢ ب $-\frac{١}{٢}$ ج $-\frac{١}{٢}$ د ٢

٣ جميع المصفوفات الآتية لها معكوس ضربى ما عدا المصفوفة:

أ $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ١ \end{pmatrix}$ ب $\begin{pmatrix} ٠ & ٤ \\ ١ & -٣ \end{pmatrix}$ ج $\begin{pmatrix} ٢ & -٣ \\ -٤ & ٦ \end{pmatrix}$ د $\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$

٤ إذا كانت أ مصفوفة غير منفردة فإن $(أب)^{-١}$ تساوى:

أ $-أ\,ب$ ب $أ^{-١}\,ب^{-١}$ ج $ب^{-١}\,أ^{-١}$ د $(ب\,أ)^{-١}$

٨٤ الصف الثالث الثانوى - كتاب الطالب

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

- ناقش مع طلابك ما ورد فى بند حاول أن تحل وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة.

٥

أولًا:

$$(أ^{-١})^{مد} = \begin{pmatrix} \frac{٢}{٧} & \frac{١}{٧} \\ \frac{-١}{٧} & \frac{٣}{٧} \end{pmatrix}^{مد} = \begin{pmatrix} \frac{٢}{٧} & \frac{-١}{٧} \\ \frac{١}{٧} & \frac{٣}{٧} \end{pmatrix} = \frac{١}{٧}\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$$

$$(أ^{مد}) = \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix}$$

$$(أ^{مد})^{-١} = \frac{١}{٧}\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix} = (أ^{-١})^{مد}$$

ثانيًا:

$$(أ^{-١})^{٢} = \frac{١}{٧}\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix} \times \frac{١}{٧}\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix} = \frac{١}{٤٩}\begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ -٥ & ٨ \end{pmatrix}$$

$$أ^{٢} = \begin{pmatrix} ٣ & -١ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٣ & -١ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٨ & -٥ \\ ٥ & ٣ \end{pmatrix}$$

$$(أ^{٢})^{-١} = \frac{١}{٤٩}\begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ -٥ & ٨ \end{pmatrix} = (أ^{-١})^{٢}$$

المـــصـــفوفـــات | ٣ - ٢

ثانيًا: أجب عن الأسئلة الآتية:

٥ أوجد قيمة س التى تجعل كلًّا من المصفوفات الآتية منفردة:

أ $\begin{pmatrix} ٢ & \text{س} - ٣ \\ \text{س} + ٢ & ٧ \end{pmatrix}$ ب $\begin{pmatrix} ٣ & -١ & ٣ \\ \text{س} + ١ & ٣\text{س} & ٢\text{س} \\ ٤ & ٢ & ٤ \end{pmatrix}$ ج $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & \text{س} + ٤ \\ ٥ & ٤ & ٣ \\ ١ & \text{س} - ١ & ٧ \end{pmatrix}$

٦ أوجد المعكوس الضربى لكل من المصفوفات الآتية:

أ $\begin{pmatrix} ٥ & ٤ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$ ب $\begin{pmatrix} ٠ & ٣ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix}$ ج $\begin{pmatrix} -\text{جتا}\theta & \text{جا}\theta \\ \text{جا}\theta & \text{جتا}\theta \end{pmatrix}$ د $\begin{pmatrix} \text{ظا}^٢\theta & \text{قا}\theta \\ \text{قا}\theta & ١ \end{pmatrix}$

هـ $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٣ \\ ٠ & ٣ & ٠ \\ ٣ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} ٠ & ٣ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ ز $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٣ \\ ١ & ٠ & -٥ \end{pmatrix}$ ح $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ١ & ٣ & ٢ \\ ٢ & ١ & ٣ \end{pmatrix}$

٧ إذا كان أ = $\begin{pmatrix} -١ & ١ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$ فحقق أن (أ ب)$^{-١}$ = ب$^{-١}$ أ$^{-١}$

٨ إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ -١ & -٢ & ٠ \\ -٣ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ فحقق أن: (أ$^{\text{مد}}$)$^{-١}$ = (أ$^{-١}$)$^{\text{مد}}$

٩ إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٠ & ٤ & -٣ \\ ٥ & -١ & ٢ \\ -٢ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$ فحقق أن: (أ^٢)$^{-١}$ = (أ$^{-١}$)^٢

١٠ تفكير إبداعى: إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ١٠ \end{pmatrix}$ فأثبت أن أ^٢ - ٧أ - ٨ I = ☐

ثم استخدم ذلك فى إيجاد المعكوس الضربى للمصفوفة أ

كتاب الجبر والهندسة الفراغية - الجبر ٨٥

تمارين (١ - ٢)

اسئلة الاختيار من متعدد

١ ب ٢ أ ٣ ج ٤ د

٥ أ $\begin{vmatrix} ٢ & \text{س} - ٣ \\ \text{س} + ٢ & ٧ \end{vmatrix}$ = صفر

٥ ب قيم س التى تجعل $\begin{pmatrix} ٣ & -١ & ٣ \\ \text{س} + ١ & ٣\text{س} & ٢\text{س} \\ ٤ & ٢ & ٤ \end{pmatrix}$

بوضع

$\begin{vmatrix} ٣ & -١ & ٣ \\ \text{س} + ١ & ٣\text{س} & ٢\text{س} \\ ٤ & ٢ & ٤ \end{vmatrix}$ = صفر ∴ س = ١

٦ المعكوس الضربى لـ $\begin{pmatrix} ٥ & ٤ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix} = \frac{١}{٢}\begin{pmatrix} -٥ & ٣ \\ ٤ & -٢ \end{pmatrix}$

ج $\begin{pmatrix} -\text{جتا}\theta & \text{جا}\theta \\ \text{جا}\theta & \text{جتا}\theta \end{pmatrix}^{-١} = ١\begin{pmatrix} \text{جتا}\theta & \text{جا}\theta \\ \text{جا}\theta & -\text{جتا}\theta \end{pmatrix}$

هـ $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٣ \\ ٠ & ٣ & ٠ \\ ٣ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}^{-١} = \frac{١}{٢٧}\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

ز $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٣ \\ ١ & ٠ & -٥ \end{pmatrix}^{-١} = \frac{١}{|\text{أ}|} \times \text{أ}^{\text{مل}}$

$= ١\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & -٣ \\ ١ & ٠ & ٥ \end{pmatrix}$

٧ **الأيمن**

(أ ب)$^{-١}$ = $\left(\begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -١ & ٤ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix}\right)^{-١}$

$= \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ١٠ & ٦ \end{pmatrix}^{-١} = \frac{١}{٢}\begin{pmatrix} -٣ & ١٠ \\ ٢ & -٦ \end{pmatrix}$ ١

الأيسر

ب$^{-١}$ أ$^{-١}$ = $\begin{pmatrix} -٥ & ٢ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix} \times \frac{١}{٢}\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ١ & -٢ \end{pmatrix}$ ٢

$= \frac{١}{٢}\begin{pmatrix} -٣ & ١٠ \\ ٢ & -٦ \end{pmatrix}$

(أ ب)$^{-١}$ = ب$^{-١}$ أ$^{-١}$

٨ (أ$^{\text{مد}}$)$^{-١}$ = $\begin{pmatrix} -٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & -٢ & ٢ \\ -٣ & -١ & ٣ \end{pmatrix}^{-١} = \frac{١}{٢}\begin{pmatrix} -٠ & ٠ & ٦ \\ ٠ & -٣ & ٦ \\ -٢ & ١ & ٤ \end{pmatrix}$

١٠ **تفكير إبداعى**

∴ أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ١٠ \end{pmatrix}$ فاثبت أن: أ^٢ - ٧أ - ٨ I

أ^٢ = $\begin{pmatrix} ١٤ & ٤٩ \\ ٣٦ & ٧٠ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -١٤ & -٢١ \\ -٢٨ & -٧٠ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٠ & ٨٠ \\ ٨٠ & ٠ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix} =$

أ^٢ - ٧أ - ٨ I = 　　　 أ$^{-١}$ (م^٢ - ٧أ - ٨أ) = أ$^{-١}$

أ - ٧ I - ٨أ$^{-١}$ = 　　　 ٨أ$^{-١}$ = أ - ٧ I

$= \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ١٠ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٧ & ٧ \\ ٧ & ٠ \end{pmatrix}$

٨أ$^{-١}$ = $\begin{pmatrix} ٢ & -٤ \\ -٣ & ١٠ \end{pmatrix}$ 　　　 ∴ أ$^{-١}$ = $\frac{١}{٢}\begin{pmatrix} ٢ & -٤ \\ -٣ & ١٠ \end{pmatrix}$

٣ - ٣ حل المعادلات الخطية باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة

Solving Linear Equations Matrix Inverse

خلفية:

سبق وأن درس الطالب الحل الجبرى للمعادلات الخطية وكذلك درس المصفوفة المربعة ٢ × ٢ وكذلك ٣ × ٣ والعمليات عليها. وسوف نستكمل فى هذا الدرس كيفية تمثيل المعادلات الجبرية على صورة مصفوفة وفيها إيجاد حل لهذه المعادلات.

أهداف الدرس:

- حل معادلات خطية باستخدام المعكوس الضربي للمصفوفة.
- يحول معادلته المصفوفة إلى معادلة خطية.
- يتعرف المعادلة المتجانسة والمعادلة غير المتجانسة.
- يتعرف مرتبة مصفوفه المعاملات.
- يتعرف مرتبة مصفوفه المعاملات الموسعة.
- يستخدم التقنيات الحديثة فى تسهيل إجراءات الحل.

مفردات أساسية:

معادلة خطية - مصفوفة معاملات - مرتبة مصفوفة المعاملات - المعادلة المتجانسة - المعادلة غير المتجانسة

المواد التعليمية المستخدمة

السبورة التعليمية - أقلام - آلة حاسبة علمية

طرق التدريس المستخدمة:

العرض المباشر - العصف الذهنى - المناقشة والحوار - حل المشكلات - الاكتشاف

مكان التدريس

الفصل الدراسى

الوحدة الثالثة

٣ - ٣

حل المعادلات الخطية باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة

Solving Linear Equations Using Matrix Inverse

سوف تتعلم

- أنظمة المعادلات الخطية
- استخدام الآله الحاسبة العلمية
- تحويل معادلة المصفوفة إلى معادلة خطية
- إيجاد مرتبة المصفوفة
- إمكانية حل المعادلات عن طريق المصفوفة الموسعة

مصطلحات أساسية

- معادلة المصفوفة *Equation of a matrix*
- مرتبة المصفوفة *Rank of a matrix*
- معادلة متجانسة *Homogenuous equation*
- معادلة غير متجانسة *Non Homgenuous equation*
- المصفوفة الموسعة *Augmented Matrix*
- معادلات خطية *Linear Equations*
- مرتبة المصفوفة *Rank of a matrix*
- مصفوفة المعاملات *Co factor matrix*

فكر و ناقش

سبق أن استخدمت حلولًا جبرية مختلفة لإيجاد حل المعادلات الخطية الآتية:

٢س + ٣ص = ٧ ، ٣س - ص = ٥

فهل يمكنك تمثيل المعادلات السابقة على صورة معادلة المصفوفة و إيجاد حل هذه المعادلات؟

تمثل معادلة المصفوفة منظومة كاملة من المعادلات

نظام المعادلات	معادلة المصفوفة
٢س + ٣ص = ٧ ٣س - ص = ٥	$\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ \\ ٥ \end{pmatrix}$

- قارن بين نظام المعادلات فى صورته الجبرية ونظام معادلة المصفوفة، وحدد أين توجد مصفوفة معاملات س، ص، مصفوفة المتغيرات، ومصفوفة الثوابت.

مصفوفة المعاملات أ		مصفوفة المتغيرات س		مصفوفة الثوابت ب
$\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix}$	×	$\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$	=	$\begin{pmatrix} ٧ \\ ٥ \end{pmatrix}$

لذلك يمكن كتابة كل مصفوفة فى معادلة بالصورة: أ س = ب

- هل يمكنك إيجاد ناتج ضرب المصفوفتين $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$ ؟
- قارن بين عدد أعمدة الأولى وعدد صفوف الثانية - ماذا تلاحظ؟
- ناتج الضرب الذى حصلت عليه يجب أن يساوى $\begin{pmatrix} ٧ \\ ٥ \end{pmatrix}$
- هل يمكنك استخدام معكوس المصفوفة فى الدرس السابق لحل معادلة المصفوفة؟

٨٦ الصف الثالث الثانوى - كتاب الطالب

مصادر التعلم

كتاب الطالب من ص(٨٦) إلى ص(١٠٢)

التهيئة:

- استرجع مع طلابك ما ورد فى بند فكر وناقش ص٨٦ عن كيفية إيجاد المتغيرات س، ص باستخدام الحل الجبرى.

إجراءات الدرس:

- انتقل من الحل الجبرى للمعادلات السابقة ووضح لطلابك أنه يمكن استخدام المصفوفات فى إيجاد حل للمعادلات. عن طريق تمثيل المعادلات على شكل مصفوفه.
- وضح لهم كيفيه حل المعادلة المصفوفية كالتالى:

كما تحل المعادلة التى على الصورة أس = ج

معادلة المصفوفة

$$\begin{pmatrix} -٤ & ٢ \\ ١٠ & -٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ \\ ٥ \end{pmatrix}$$

المعادلة الجبرية أس = ج

أنظمة المعادلات الخطية *Systems of linear Equations*

يمكن حل عدد «ن» من المعادلات الخطية التى تحتوى على «ن» من المتغيرات والتى لها حل وحيد باستخدام ضرب المصفوفات عندما تكون ن = ٢ أو ن = ٣

وباعتبار أن نظام المعادلات هو:

$أ_١ س + ب_١ ص + جـ_١ ع = د_١$

$أ_٢ س + ب_٢ ص + جـ_٢ ع = د_٢$ فنحصل على أ س = ب

$أ_٣ س + ب_٣ ص + جـ_٣ ع = د_٣$

$أ^{-١} (أ × س) = أ^{-١} × ب$ بضرب طرفى المعادلة فى أ$^{-١}$

$(أ^{-١} × أ) × س = أ^{-١} × ب$ خاصية التجميع

$I × س = أ^{-١} ب$ لأن I عنصر محايد

$س = أ^{-١} ب$

لاحظ أن: حل معادلة المصفوفة أ س = ب هو حاصل ضرب المعكوس الضربى لمصفوفة المعاملات فى مصفوفة الثوابت.

مثال

(١) حل المعادلات الآتية: ٤س + ص=٠ ، س + ٢ع = ١٥ ، ص-٧ع = ٠ باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفات

الحل

تكتب المعادلة المصفوفية أ س = ج حيث

$أ = \begin{pmatrix} ٤ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٢ \\ ٠ & ١ & -٧ \end{pmatrix}$ ، $س = \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix}$ ، $ج = \begin{pmatrix} ٠ \\ ١٥ \\ ٠ \end{pmatrix}$

نوجِد المعكوس الضربى للمصفوفة باستخدام مصفوفة العوامل المرفقة

$محدد أ = \triangle = \begin{vmatrix} ٤ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٢ \\ ٠ & ١ & -٧ \end{vmatrix} = ٤(-٢) - ١(-٧) = -١$

$مصفوفة العوامل المرافقة = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} ٠ & ٢ \\ ١ & -٧ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٠ & -٧ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ ١ & -٧ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ٤ & ٠ \\ ٠ & -٧ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ٤ & ١ \\ ٠ & ١ \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ٢ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ٤ & ٠ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ٤ & ١ \\ ١ & ٠ \end{vmatrix} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -٢ & ٧ & ١ \\ ٧ & -٢٨ & -٤ \\ ٢ & -٨ & -١ \end{pmatrix}$ $أ^{مل} = \begin{pmatrix} -٢ & ٧ & ٢ \\ ٧ & -٢٨ & -٨ \\ ١ & -٤ & -١ \end{pmatrix}$

- يضرب كل طرف فى المعكوس الضربى

يطبق كما فى حل المعادلة

$(أ)^{-١} أ س = ب × (أ)^{-١}$ ١

∴ نوجد للمصفوفة المعكوس الضربى لمصفوفة المعاملات إن وجد

∴ من ١

$I س = (أ)^{-١} ب$

$∴ س = \frac{ب}{أ}$

∴ حل المعادلة المصفوفية على الشكل أ س = ب هو حاصل ضرب المعكوس الضربى لمصفوفة المعاملات فى مصفوفة الثوابت.

معلومات إضافية

يمكنك استخدام هذه الطريقة لحل نظام معادلات فقط إذا كان لمصفوفة المعاملات معكوس ضربى، أما إذا لم يكن لها معكوس ضربى، فيمكن أن يكون للنظام عدد لانهائى من الحلول أو لايوجد له حل.

نشاط

- كلف طلابك بإجراء النشاط التالى:

تخطط ادارة المدرسة لاقامة يوم مفتوح لطلاب مرحلة دراسية. فإذا كانت تكلفة تأجير آلة لعمل البطاطس (٦٠) جنيهًا فى اليوم، وتكلفة تأجير آلة الحلوى (٧٠) جنيهًا، ودفعت الادارة ٦٦٠ جنيهًا لاستئجار (١٠) أجهزة من النوعين السابقين.
فكم جهازًا استأجرت من كل نوع؟

الحل:

- كلف طلابك بترجمه المسألة السابقة إلى معادلة جبرية ومعادلة مصفوفيه.
- اطلب من طلابك حل المعادلة المصفوفية

اجابة المسألة:

٤ آلات من النوع الأول

٦ آلات من النوع الثانى

تمارين إضافية:

١- حدد ما إذا كانت كل من المصفوفين تمثل معكوسًا ضربيًا للأخرى فى كل مما يأتى

(أ) $أ = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$، $ب = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٠ & -١ \end{pmatrix}$

(ب) $ل = \begin{pmatrix} -١ & -١ \\ -١ & ٠ \end{pmatrix}$، $م = \begin{pmatrix} ١ & -١ \\ -١ & ٠ \end{pmatrix}$

٢- استخدم مصفوفة المعادلات لحل كل مما يأتى:

٢س + ص = ٩

س + ص = ٣

الإجابة (٥ ، -٢)

اكتشف الخطأ:

قامت كل من سمر وأمل باعداد معادلة مصفوفيه بنظام المعادلات التالية

٥س + ٧ص = ١٩   ٣ص + ٤س = ١٠

حل سمر

$$\begin{pmatrix} ٧ & ٥ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٩ \\ ١٠ \end{pmatrix}$$

حل أمل

$$\begin{pmatrix} ٧ & ٥ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٩ \\ ١٠ \end{pmatrix}$$

- وضح لطلابك حل كل منهما
- ناقش طلابك فى محاولة اكتشاف الخطأ لعدم وقوع أحد الطلبه فيه.

إجابة أمل خاطئة لإنها وضعت ٣ للمتغير س بدلًا من ٤

تمرين إثرائى:

١- حدد إذا كانت الجملة التالية:

صحيحة دائمًا، صحيحة أحيانًا، غير صحيحة أبدًا وفسر إجابتك. (المصفوفة المربعة لها معكوس ضربى)

الحل

احيانًا: إجابة ممكنه: لانه يكون للمصفوفة المربعة معكوس ضربى إذا كان محددها يساوى صفر

٢- اكتب معادلة مصفوفيه ليس لها حل؟

اكثر من حل

$$\begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٦ & ٣ \end{vmatrix} \begin{vmatrix} س \\ ص \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٩ \\ ١٠ \end{vmatrix}$$

أخطاء شائعه:

- وجه طلابك إلى أن جميع المعادلات الخطية يجب أن تكتب مع متغيراتها بالترتيب نفسه قبل استعمال الصيغة المصفوفيه.
- كيف يمكن استعمال معادلات مصفوفيه لحل أنظمة المعادلات
- رتب كل معاملات فى مصفوفه معاملات.
- رتب المتغيرات فى مصفوفه متغيرات.
- رتب الثوابت فى مصفوفه الثوابت.
- نوجد المعكوس الضربى لمصفوفه المعاملات.
- اضرب طرفى المعادلة المصفوفية فى المعكوس الضربى لمصفوفه المعاملات.
- تحقق من الحل بالتعويض فى المعادلة الأصلية.

الوحدة الثالثة: المحددات والمصفوفات

$$أ^{-١} = \frac{١}{|أ|} \times أ_{مل} = \frac{١}{-١} \begin{pmatrix} ٢ & ٧ & ٢- \\ ٨- & ٢٨- & ٧ \\ ١- & ٤- & ١ \end{pmatrix} \qquad \therefore س = أ^{-١} ب$$

$$\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \frac{١}{-١} \begin{pmatrix} ٢ & ٧ & ٢- \\ ٨- & ٢٨- & ٧ \\ ١- & ٤- & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٠ \\ ١٥ \\ ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٠٥- \\ ٤٨٠ \\ ٦٠ \end{pmatrix}$$

∴ س = -١٠٥ ، ص = ٤٨٠ ، ع = ٦٠   مجموعة الحل = {(-١٠٥ ، ٤٨٠ ، ٦٠)}

حاول أن تحل

(١) حل المعادلات الآتية:

٢س - ٣ص - ع = ٩ ، س + ٢ص + ٣ع = ١٥ ، س - ٢ع = ١٢

باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفات

استخدام الآلة الحاسبة العلمية Use of Scientific Calculator

يمكن استخدام الآلة الحاسبة العملية فى حل مجموعة المعادلات الخطية فى ٣ مجاهيل على النحول التالى:

اضغط على المفاتيح MODE فتظهر القائمة التالية:

General Calculations	MODE 1 (COMP)
Complex number calculations	MODE 2 (CMPLX)
Statistical and regression calculations	MODE 3 (STAT)
Calculations involving specific number systems (binary, octal, decimal, hexadeiaml)	MODE 4 (BASE-N)
Equation solution	MODE 5 (EQN)
Matrix calculations	MODE 6 (MATRIX)
Generate a number table based on one or two functions.	MODE 7 (TABLE)
Vector calculations	MODE 8 (VECTOR)
Inequality solution	MODE ▼ 1 (INEQ)
Verify a calculation	MODE ▼ 2 (VERIF)
Distribution calculations	MODE ▼ 3 (DIST)

الصف الثالث الثانوى - كتاب الطالب   ٨٨

تمرين إثرائى (نشاط تعاونى)

حل المعادلتين الآتيتين بطرق مختلفة

٣س + ص = ٥   -٤س - ٢ص = ٢٠

- ثم اطلب من الطلاب حل هاتين المعادلتين بأربع طرق مختلفة
  - ١- التمثيل البيانى.
  - ٢- الطريقة الجبرية.
  - ٣- استعمال طريقة كرامر.
  - ٤- استخدام المعكوس الضربى للمصفوفه.
- ثم اطلب منهم أن يوضحوا نقط الاختلاف بين هذه الطرق باستخدام معايير محدده.

معلومات إضافية:

يمكن استخدام الحاسبة البيانية TI - nspire لحل نظام المعادلات الخطية وذلك لأنها تحتوى المصفوفة الموسعة على مصفوفه المعاملات مع عمود إضافى إلى اليمين يحوى الثوابت، وباختزال المصفوفة الموسعة يصبح من السهل حل نظام من المعادلات.

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

¤ ناقش مع طلابك بند حاول أن تحل

(١) حاول أن تحل

$$أ = \begin{pmatrix} -١ & -٣ & ٢ \\ ٣ & ٢ & ١ \\ ٢ & ٠ & ١ \end{pmatrix} ، \quad |أ| = \begin{vmatrix} -١ & -٣ \\ -٣ & ٢ \end{vmatrix} -٢ \begin{vmatrix} -٣ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix}$$

$$= (-٩ + ٢) - ٢ (٤ + ٣) = -٢١$$

$$أ^{-١} = \frac{١}{٢١} \begin{pmatrix} ٧ & ٦ & ٤ \\ ٧ & ٣ & -٥ \\ -٧ & ٣ & ٢ \end{pmatrix}$$

$$س = أ^{-١} ج$$

$$\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \frac{١}{٢١} \begin{pmatrix} ٧ & ٦ & ٤ \\ ٧ & ٣ & -٥ \\ -٧ & ٣ & ٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٩ \\ ١٥ \\ ١٢ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٠ \\ ٤ \\ -١ \end{pmatrix}$$

س = ١٠، ص = ٤، ع = -١

نظام المعادلات الخطية المتجانسة وغير المتجانسة

يقال للمعادلات الخطية أنها متجانسة فى حالة واحدة فقط إذا كانت كل عنصر من عناصر مصفوفة الثوابت = صفر بمعنى أن

$$ب = \begin{pmatrix} ٠ \\ ٠ \\ ٠ \end{pmatrix}$$

يقال للمعادلات الخطية أنها غير متجانسة فى حالة وجود أحد عناصر مصفوفه الثوابت لايساوى صفر.

تعبير شفهى:

وضح لطلابك نظام المعادلات الخطية المتجانسة وغير المتجانسة من خلال عرض بند تعبير شفهى.

اكتشف الخطأ

كتب أسامه معادلة مصفوفيه توضح تكاليف رحلتين بالقطار من المدينة (أ) إلى المدينة (ب)، واستخدم الرمز (س) ليدل على تكلفة الرحلة ذهابًا وأيابًا واستخدم الرمز (ص) لتكلفة الرحلة فى اتجاه واحد.

كالتالى: $\begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦١ \\ ٥٤ \end{pmatrix}$

ثم أوجد المعكوس الضربى

$$\begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٢ \end{pmatrix}^{-١} = \frac{١}{٤} \begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ -٢ & ٣ \end{pmatrix}$$

اختر من (EQN) 5 فتظهر لك القائمة التالية:

To select this calculation Type:	Press this key:
Simultaneous linear equations with two unknowms	1 $(a_nX + b_nY = C_n)$
Simultaneous linear equations with three unknowms	2 $(a_nX + b_nY = C_nZ = d_n)$
Quadratic equation	3 $(aX^2 + bX = 0)$
Cubic equation	4 $(aX^3 + bX^2 + cX + d = 0)$

اختر منه 2 وذلك بالضغط عليه ولتكن المعادلات المعطاة هى:

س - ص + ع = ٢ ، س + ص - ع = ٠ ، -س + ص + ع = ٤

$x - y + z = 2,\ y - z = 0,\ -x + y + z = 4$

MODE 5 (EQN) 2 $(a_nX + b_nY + C_nZ = d_n)$

1 = (-) 1 = 1 = 2 =

1 = 1 = (-) 1 = 0 =

(-) 1 = 1 = 1 = 4 =

= (X=) = 1

▼ (Y=) = 2

▼ (Z=) = 3

نشاط

استخدم الآلة الحاسبة العلمية للتحقق من صحة حل مثال (١)

تحويل معادلة المصفوفة إلى معادلات خطية: *Convert a matrix equation to linear equation*

إذا كان لدينا نظام من معادلات فى صورة مصفوفات، فيمكن إعادته إلى صورته الأصلية "صورة معادلات خطية وذلك بضرب مصفوفة المعاملات فى مصفوفة المتغيرات.

فمثلًا يمكن تحويل معادلة المصفوفة التالية إلى صورة معادلات خطية كالآتى:

$$\begin{pmatrix} ٣ & -٢ & ٥ \\ ٢ & ٣ & -٤ \\ ١ & ٤ & ٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٠ \\ ١٨ \\ ٢٠ \end{pmatrix}$$

أى أن: $\begin{pmatrix} ٣ & -٢ & ٥ \\ ٢ & ٣ & -٤ \\ ١ & ٤ & ٣ \end{pmatrix}_{٣ \times ٣} \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix}_{٣ \times ١} = \begin{pmatrix} ١٠ \\ ١٨ \\ ٢٠ \end{pmatrix}$

لذلك فإن: $\begin{pmatrix} ٣س - ٢ص + ٥ع \\ ٢س + ٢ص - ٢ع \\ س + ٤ص + ٣ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٠ \\ ١٨ \\ ٢٠ \end{pmatrix}$

وبالتالى تكون المصفوفات متساوية.

ومن خاصية تساوى مصفوفتين من نفس النظم

فإن: ٣س -٢ص +٥ع = ١٠ ، ٢س +٢ص - ٢ع = ١٨ ، س +٤ص + ٣ع = ٢٠

ويصبح لدينا نظام المعادلات الأصلى باستخدام ضرب المصفوفات وتساوى المصفوفات.

نظام المعادلات الخطية المتجانسة وغير المتجانسة

يقال إن نظام المعادلات الخطية متجانسة إذا كان كل عنصر من عناصر مصفوفة الثوابت يساوى صفر

أى إن ب = $\begin{pmatrix} ٠ \\ ٠ \\ ٠ \end{pmatrix}$ ، أما إذا كان أحد عناصر مصفوفة الثوابت لا يساوى صفر فإن نظام المعادلات الخطية تسمى معادلات خطية غير متجانسة

تعبير شفهى: بين أي نظام من الأنظمة الآتية يمثل نظام معادلات خطية متجانسة و أيها يمثل نظام معادلات خطية غير متجانسة.

١ ٣س+٢ص-٥ع =٠ ، ٥س-٣ص+٢ع =٤ ، س-٢ع =٠

٢ ٢س+٣ص=٥ع ، ٣س+ع =٤ص ، س+ع =٠

مرتبة المصفوفة *Rank of a matrix*

تعريف: مرتبة المصفوفة غير الصفرية هى أعلى درجة لمحدد أو محدد أصغر للمصفوفة قيمته لا تساوى صفر. فإذا كانت المصفوفة أ غير صفرية فإن مرتبة المصفوفة أ نرمز لها بالرمز ر (أ) ،حيث ر (أ)≥١

كيفية إيجاد مرتبة المصفوفة

الحالة الأولى:

لتكن أ مصفوفة علي النظم م × ن حيث م > ن فإن مرتبة أ تساوى ن على الأكثر ، فإذا وجد محدد واحد علي الأقل من الدرجة ن قيمته لا تساوى صفرًا فإن مرتبة المصفوفة أ تساوى ن ، أما إذا كانت جميع المحددات من الدرجة ن تساوى صفرًا فإن مرتبة أ تكون أقل من ن، نحسب جميع المحددات من الدرجة (ن-١) للمصفوفة أ فإذا وجد واحد منها علي الأقل لا يساوى صفرًا فإن مرتبة المصفوفة أ تساوى (ن - ١) أما إذا كانت جميعها تساوى صفرًا فتحسب كل المحددات من الدرجة (ن -٢) للمصفوفة أ ، وهكذا بتكرار العملية نصل إلى أكبر درجة لمحدد لايساوى صفرًا فتكون هى مرتبة المحدد.

مثال

(٢) أوجد مرتبة كل من المصفوفتين أ = $\begin{pmatrix} ٣ & -٢ & ٤ \\ ٢ & -٣ & ٦ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ١ & ٤ & ٥ \\ ٣ & ١٢ & ١٥ \end{pmatrix}$

ثم حسب إجابته كالتالى:

$$\begin{pmatrix}٦١\\٥٤\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{١}{٤} & \frac{١}{٢}\\ \frac{٣}{٤} & -\frac{١}{٢}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}س\\ص\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}٣٤\\١٠\end{pmatrix}$$

وعندما تحقق ما إجابته، وجد أن القيم التى حصل عليها لاتحقق المعادلة الإصلية؟

فأين الخطأ فيما إجراء أسامه؟

الإجابة: فى ضرب المصفوفات فى الخطوه الأخيره تساوى ١٧ وليست ٣٤

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

⌑ ناقش مع طلابك ما ورد فى بنود حاول أن تحل وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة.

حاول أن تحل (٢) ص(٩٩)

ر (أ) = ٢ ر (ب) = ١

حاول أن تحل (٣) ص(١٠٠)

ر (أ) = ١ ر (ب) = ١

حاول أن تحل (٤) ص(١٠٠)

ر(أ) = ٣ ر (ب) = ٢

فى بند تفكير ناقد:

يهدف إلى تعريف رتبة المصفوفة غير الصفرية باستخدام مسائل غير مباشرة.

الإجابة

١- ك = ٠ **٢-** ك = $\frac{٢٠}{٧}$

نشاط

⌑ اطلب إلى طلابك التأكد من البنود التالية عن طريق أمثلة أوبرهان لكل مما يأتى:

(١) مرتبة المصفوفة الصفرية تساوى صفر

(٢) مرتبة المصفوفة أ = مرتبة أمد

(٣) إذا أضيف «صف» أو «عمود» صفرى على المصفوفة (أ) فإن رتبتها لاتتغير

(٤) إذا أضيف صف أو عمود عباره عن تجميع لعده صفوف (أعمده) فإن مرتبة المصفوفة لاتتغير.

الحل

أولًا: المصفوفة أ = $\begin{pmatrix}٤ & -١ & ٣\\ ١ & ٥ & ٢\end{pmatrix}$ مصفوفة على نظم ٢ × ٣

لذلك فإن أعلى درجة لمحدد يمكن تكوينة منها هو ٢

∴ نوجد $\begin{vmatrix}-٢ & ٣\\ -٣ & ٢\end{vmatrix}$ = -٩ + ٤ = -٥ ≠ صفر المحددات الصغرى درجة ٢

∴ ر (أ) = ں -١ = ٣ - ١ = ٢

ثانيًا: المصفوفة ب = $\begin{pmatrix}٥ & ٤ & ١\\ ١٥ & ١٢ & ٣\end{pmatrix}$ مصفوفة على نظم ٢ × ٣

أعلى درجة لمحدد يمكن تكوينه منها هو ٢

$\begin{vmatrix}٤ & ١\\ ١٢ & ٣\end{vmatrix}$ = صفر ، $\begin{vmatrix}٥ & ٤\\ ١٥ & ١٢\end{vmatrix}$ = صفر ، $\begin{vmatrix}٥ & ١\\ ١٥ & ٣\end{vmatrix}$ = صفر

∵ قيمة كل من المحددات الصغرى = صفر

∴ ر (أ) < ٢ ∴ ر (أ) = ١

حاول أن تحل

(٢) أوجد مرتبة كل من المصفوفات الآتية:

أ = $\begin{pmatrix}-٣ & ٧ & ٢\\ ٢ & ٥ & ٣\end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix}٩ & ٣ & ١,٥\\ ٦ & ٢ & ١\end{pmatrix}$

الحالة الثانية: إذا كانت أ مصفوفة غير صفرية على نظم م×ں وكانت م < ں فإن مرتبة أ ≥ م وتتبع نفس الطريقة كما فى الحالة الأولى.

مثال

(٣) أوجد مرتبة كل من المصفوفات الآتية:

أ = $\begin{pmatrix}٥ & ٢\\ -٤ & ٦\\ ٢ & -٣\end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix}٦ & ٢\\ ١٢ & ٤\\ ١٥ & ٥\end{pmatrix}$

الحل

أولًا: المصفوفة أ = $\begin{pmatrix}٥ & ٢\\ -٤ & ٦\\ ٢ & -٣\end{pmatrix}$ مصفوفة على النظم ٣ × ٢ فتكون أعلى درجة لمحدد يمكن تكوينه منها هى ٢

نوجد $\begin{bmatrix}٥ & ٢\\ -٤ & ٦\end{bmatrix}$ = -٨ - ٣٠ = -٣٨ ≠ صفر

∴ ر (أ) = = ٢

ثانيًا: المصفوفة ب = $\begin{pmatrix}٦ & ٢\\ ١٢ & ٤\\ ١٥ & ٥\end{pmatrix}$ مصفوفة على نظم ٣ × ٢

∴ أعلى درجة لمحدد يمكن تكوينه منها على درجة ٢

$\begin{vmatrix}٦ & ٢\\ ١٢ & ٤\end{vmatrix}$ = صفر ، $\begin{vmatrix}١٢ & ٤\\ ١٥ & ٥\end{vmatrix}$ = صفر ، $\begin{vmatrix}٦ & ٢\\ ١٥ & ٥\end{vmatrix}$ = صفر

∵ قيمة المحددات الصغرى = صفر ر (ب) = ١

حاول أن تحل

(٣) أوجد مرتبة كل من المصفوفات الآتية: أ = $\begin{pmatrix}-٧ & ٥\\ ٣ & ٢\\ ٠ & ٠\end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix}-١ & \frac{١}{٢}\\ -٢ & ١\\ -٤ & ٢\end{pmatrix}$

الحالة الثالثة: إذا كانت أ مصفوفة غير صفرية على نظم م × م "مصفوفة مربعة" نوجد محدد أ فإذا كان

١- |أ| ≠ صفر فتكون ر (أ) = م **٢-** |أ| = صفر فتكون ر (أ) < م

و نتبع نفس الخطوات السابقة فى الحل.

مثال

(٤) أوجد مرتبة كل من المصفوفات الآتية: أ = $\begin{pmatrix}٣ & ٠ & ٢\\ -١ & ٥ & ١\\ ٤ & ٣ & ٢\end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix}٤ & ١ & ٣\\ ٥ & ٣ & ٢\\ ١ & ٢ & -١\end{pmatrix}$

الحل

مصفوفة أ على النظم ٣ × ٣

|ب| = $\begin{vmatrix}٤ & ١ & ٣\\ ٥ & ٣ & ٢\\ ١ & ٢ & -١\end{vmatrix}$ = صفر لأن $ع_٣ = ع_١ + ع_٢$ ∴ ر (أ) < ٣

نوجد أى محدد من درجة ٢

$\begin{bmatrix}٥ & ٣\\ ١ & ٢\end{bmatrix}$ = ٣ - ١٠ = -٧ ≠ صفر ∴ ر (أ) = ٢

حاول أن تحل

(٤) أوجد مرتبة كل من المصفوفة أ = $\begin{pmatrix}٠ & ٢ & ٥\\ ٠ & ١ & ٣\\ ٣ & -١ & ١\end{pmatrix}$ ، المصفوفة ب = $\begin{pmatrix}٥ & ٣ & ٢\\ -٢ & ٤ & ٧\\ ١٥ & ٩ & ٦\end{pmatrix}$

لاحظ أن

١- إذا كانت أ مصفوفة الوحدة على النظم م × م فإن مرتبة أ يساوى م لأن |I| = ١ ≠ صفر

٢- مرتبة المصفوفة الصفرية تساوى صفر

٣- مرتبة المصفوفة أ = مرتبة أمد

٤- إذا أُضيف (أو حُذف) صف (عمود) صفرى على المصفوفة أ فإن رتبتها لا تتغير.

٥- إذا أضيف (أو حذف) صف (عمود) عبارة عن تجميع لعدة صفوف (أعمدة) فإن مرتبة المصفوفة أ لا تتغير.

تفكير ناقد

١- إذا كانت المصفوفة أ = $\begin{pmatrix}٣ & ١ & ٢\\ ١ & ٠ & ك\\ -١ & ٤ & ٢\end{pmatrix}$ وكان ر (أ) = ٢ أوجد قيمة ك

٢- اذا كانت المصفوفة أ = $\begin{pmatrix}١ & ٣ & -١\\ ٢ & ك & ٠\\ ٤ & ١ & ٣\end{pmatrix}$ وكانت ر (أ) = ٣ أوجد قيمة ك الحقيقية

المصفوفة الموسعة — *Augmented matrix*

إذا كان لدينا م من المعادلات الخطية في ن من المجاهيل، فإنها تكتب على الصورة أس = ب و يمكن كتابتها على الصورة:

$$س_{١}\begin{pmatrix} أ_{١١} \\ أ_{١٢} \\ \vdots \\ أ_{م١} \end{pmatrix} + س_{٢}\begin{pmatrix} أ_{٢١} \\ أ_{٢٢} \\ \vdots \\ أ_{م٢} \end{pmatrix} + \dots\dots + س_{ن}\begin{pmatrix} أ_{١ن} \\ أ_{٢ن} \\ \vdots \\ أ_{م ن} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ب_{١} \\ ب_{٢} \\ \vdots \\ ب_{م} \end{pmatrix}$$

حيث يمكننا اعتبار كل من

$$\overline{أ_{ع}} = \begin{pmatrix} أ_{١ع} \\ أ_{٢ع} \\ \vdots \\ أ_{م ع} \end{pmatrix}$$ حيث ع = ١، ٢، ٣، ......، ن، مصفوفة عمود على نظم م × ١

وكذلك $\overline{ب} = \begin{pmatrix} ب_{١} \\ ب_{٢} \\ \vdots \\ ب_{م} \end{pmatrix}$ مصفوفة عمود على نظم م × ١

ونلاحظ أن المصفوفات $\begin{pmatrix} أ_{١١} \\ أ_{١٢} \\ \vdots \\ أ_{م١} \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} أ_{٢١} \\ أ_{٢٢} \\ \vdots \\ أ_{م٢} \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} أ_{١ن} \\ أ_{٢ن} \\ \vdots \\ أ_{م ن} \end{pmatrix}$ هي أعمدة المصفوفة أ.

وكتبنا مصفوفة الثوابت مع مصفوفة المعاملات في مصفوفة واحدة على الصورة

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} أ_{١١} & أ_{٢١} & \dots & أ_{١ن} & & ب_{١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & \dots & أ_{٢ن} & & ب_{٢} \\ \vdots & \vdots & \dots & & & \vdots \\ أ_{م١} & أ_{م٢} & & أ_{م ن} & & ب_{م} \end{array}\right)$$

تسمى المصفوفة الموسعة ، ونرمز لها بالرمز $أ^{*}$

$أ^{*} = (أ \vdots ب)$ وهي على النظم م × (ن + ١).

مثال

٥ أوجد المصفوفة الموسعة لكل من الأنظمة الآتية:

أ ٣س - ٥ص = ٢ ، ٢س + ٧ص = ٩ ، ٤س - ص = ٣

ب س + ص + ع = ٩ ، ٢س - ٣ص + ٢ع = ٣ ، ٣س + ٢ص - ٣ع = -٣

الحل

أ $أ^{*} = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -5 & 2 \\ 2 & 7 & 9 \\ 4 & -1 & 3 \end{array}\right)$

ب $أ^{*} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 2 & -3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -3 & -3 \end{array}\right)$

حاول أن تحل

٥ أوجد المصفوفة الموسعة لكل من الأنظمة الآتية:

أ ٢س + ٣ = ٧ ، ٣س-ص=٥ ، س-ص= ١

ب ٣س + ٢ص - ع = ٤ ، س + ص + ع= ٣ ، س-ع= ٠

مثال

٦ أوجد مرتبة المصفوفة الموسعة للنظام ٢س -ص=٣ ، ٦ س - ٣ص= ٩

الحل

$أ^{*} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 3 \\ 6 & -3 & 9 \end{array}\right)$ مصفوفة على نظم ٢ × ٣

∴ أعلى درجة لمحدد يمكن تكوينه منها هي ٢

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 6 =$ صفر ، $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} = -9 + 9 = 0$ ، $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 18 - 18 =$ صفر

∵ قيمة كل من المحددات الصفرية = صفر

∴ ر (أ) < ٢ ر (أ) =١

حاول أن تحل

٦ أوجد مرتبة مصفوفة الموسعة لكل من الأنظمة

أ ٣س + ٢ص= ٤ ، ٢س + ٣ص = -٦ ب ٣س - ٥ص= ٢ ، ٩س + ١٥ص = ١٠

العلاقة ببن مرتبة مصفوفة المعاملات ورتبةمصفوفة المعاملات الموسعة وإمكانية الحل

The relation between the Rank of a factor matrix and Augmented matrix, and solution availability

أولاً: المعادلات غير المتجانسة — *Non homogeneous equations*

تسمى المعادلة: $أ_{١}س_{١} + أ_{٢}س_{٢} + \dots\dots + أ_{ن}س_{ن} =$ ج معادلة غير متجانسة حيث ج ≠ ٠

وتسمى المجموعة أس = ج غير متجانسة حيث ج ≠ ▭

١- يكون للمجموعة المكونة من ن معادلة غير متجانسة فى ن مجهولاً حل وحيد إذا كانت

ر (أ) = ر($أ^{*}$) = ن (عدد المجاهيل حيث | أ | ≠ صفر

٢- يكون لمجموعة المعادلات عدد غير محدود من الحلول «عدد لا نهائي » إذا كان

ر (أ) = ر($أ^{*}$) = ك حيث ك < ن

المصفوفة الموسعة

نشاط:

- يمكن استخدام الحاسبة البيانية TI - ns pire لاحتوائها على مصفوفه معاملات مع عمود إضافى يحوى الثوابت. لتسهيل إجراء العمليات الحسابية.
- كلف طلابك بالبحث عن الحاسبة البيانية على الشبكة الدولية للمعلومات ومعرفه الخطوات التى يمكن أن يجروا عليها المصفوفة الموسعة.
- ناقش طلابك فيما توصلوا إليه من معلومات حول الحاسبة البيانية وهل يمكن إجراء بعض الحسابات الأخرى باستخدامها.
- كيف يمكن الاستفاده من الحاسبة البيانية فى حل بعض المشكلات التى قد تقابلنا أثناء حل المسائل المختلفة.

تمارين إضافية

اكتب مصفوفة موسعة لكل من نظام المعادلات فى كل مما يأتى:

أ ٦س - ٤ص + ٢ع = -٤

٢س - ٢ص + ٦ع = ١٠

٢س + ٢ص + ٢ع = -٢

ب ٤س + ٦ص = ٠

٨س - ٢ص = ٧

ج ٣س + ٢ص = -٤

٤س + ٧ص = ١٣

أخطاء شائعة

- قد يخطىء بعض الطلاب فى عدم ترتيب معاملات س، ص، ع بطريقة صحيحة، وطبقًا عليه يترتب أخطاء فى باقى الإجراءات.
- أكد إلى طلابك التأكد من كل خطوة من خطوات المسألة حتى يستطيع تدارك الخطأ وحتى لايضيع منه وقت إذا اكتشف الخطأ فى نهاية المسألة.
- قدم دائمًا تغذية راجعة عند تكليف الطلاب بحل المسائل بتصحيح الإجابات الخطأ أولاً بأول.
- اعرض على طلابك نماذج من اكتشف الخطأ حتى يمكن إدراج الخطأ وعدم الوقوع فيه.

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

حاول أن تحل ٥ ص ٩٤

أ) $أ^* = \left(\begin{array}{cc|c} ٢ & ٣ & ٧ \\ ٣ & -١ & ٥ \\ ١ & -١ & ١ \end{array}\right)$

ب) $أ^* = \left(\begin{array}{ccc|c} ٣ & ٢ & -١ & ٤ \\ ١ & ١ & ١ & ٣ \\ ١ & ٠ & ١ & ٠ \end{array}\right)$

حاول أن تحل ٦ ص ١١٢

أ) $أ^* = \left(\begin{array}{cc|c} ٣ & ٢ & ٤ \\ ٢ & ٣ & -٦ \end{array}\right)$ ، $ر(أ^*) = ٢$

ب) $أ^* = \left(\begin{array}{cc|c} ٣ & -٥ & ٢ \\ ٩ & ١٥ & ١٠ \end{array}\right)$ ، $ر(أ^*) = ٢$

المعادلات المتجانسة وغير المتجانسة

- أكد على الطلاب مفهوم المعادلات الخطية المتجانسة وغير المتجانسة.

فإذا كانت أس = ☐ سميت متجانسة و إذا كانت أس = ب، ب ≠ ☐ كانت غير متجانسة.

إمكانية حل المعادلات الخطية

معادلتين فى مجهولين حيث أس = ج ، ج ≠ ☐

- ناقش مع طلابك الجدول المرفق ص(١٠٣)

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

ناقش مع طلابك ما ورد فى بند حاول أن تحل ص(١٠٤)، (١٠٥) وتوصل معهم إلى الإجابة الصحيحة.

حاول أن تحل (٨) ص (٩٦)

$ر(أ) = ر(أ^*) = ٢$ (عدد المجاهيل)

يوجد حل وحيد وهو (٣، -١)

حاول أن تحل (٩) ص (٩٦)

$ر(أ) = ر(أ^*) = ١ <$ من عدد المجاهيل

لذلك يكون النظام له عدد لأنها فى من الحلول.

حل المعادلات الخطية باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة | ٣ - ٣

أولا: ندرس المعادلتين:

$أ_١ س + ب_١ ص = جـ_١$ $أ_٢ س + ب_٢ ص = جـ_٢$

أى أن: $\begin{pmatrix} أ_١ & ب_٢ \\ أ_٢ & ب_٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} جـ_١ \\ جـ_٢ \end{pmatrix}$ ∴ أ س = ج

(١) إذا كانت ر ($أ^*$) = ر(أ) = ٢ فإنه يوجد حل وحيد

(٢) إذا كانت ر = ر($أ^*$) = ١ فإنه يوجد عدد لانهائى من الحلول

(٣) إذا كانت = ٢ ، ر($أ^*$) =١ فإنه لايوجد حل على الأطلاق

ويلخص الجدول الآتى الحالات المختلفة

ر($أ^*$)	ر(أ)	إمكانية الحل	الحالة	المعنى الهندسى
٢	٢	يوجد حل وحيد	المستقيمان يتقاطعان	
٢	١	لايوجد حل على الأطلاق	المستقيمان يتوازيان	
١	١	يوجد عدد لانهائى من الحلول	المستقيمان ينطبقان	

مثال

(٧) بدون حل النظام ٣س-٢ص=١، ٦س-٤ص=٥ ، أثبت أن هذا النظام ليس له حل.

الحل

نوجد المصفوفة = أ = $\begin{pmatrix} ٣ & -٢ \\ ٦ & -٤ \end{pmatrix}$ وهي مصفوفة على نظم ٢×٢ مصفوفة مربعة

∴ |أ| = $\begin{vmatrix} ٣ & -٢ \\ ٦ & -٤ \end{vmatrix}$ = -١٢+ ١٢= صفر

∴ ر (أ) = ١ ⟵ (١)

نوجد $أ^*$ = $\left(\begin{array}{cc|c} ٣ & -٢ & ١ \\ ٦ & -٤ & ٥ \end{array}\right)$ مصفوفة على نظم ٢ × ٣

∴ أعلى درجة لمحدد يمكن تكوينه منها هي درجة ٢

نوجد $\begin{vmatrix} -٢ & ١ \\ -٤ & ٥ \end{vmatrix}$ = -١٠+ ٤= -٦ ≠ صفر

ر ($أ^*$) = ٣ - ١= ٢ ⟵ (٢)

من (١)، (٢)

∴ ر(أ) ≠ ر($أ^*$) ∴ النظام ليس له حل

حاول أن تحل

(٧) بدون حل النظام:

٢س + ص = ٥ ، ٤ س + ٢ص = ٧ أثبت أن هذا النظام ليس له حلًّا.

مثال

(٨) ابحث امكانية حل النظام ٣س- ص = ٥ ، س - ص = ١

الحل

نوجد المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} ٣ & -١ \\ ١ & -١ \end{pmatrix}$ وهي مصفوفة على نظم ٢ × ٢ "مصفوفة مربعة"

∴ |أ| = $\begin{vmatrix} ٣ & -١ \\ ١ & -١ \end{vmatrix}$ = -٣ + ١= -٢ ≠ صفر ر (أ) = ٢ ⟵ (١)

نوجد المصفوفة الموسعة $أ^*$ $\left(\begin{array}{cc|c} ٣ & -١ & ٥ \\ ١ & -١ & ١ \end{array}\right)$ وهي مصفوفة على نظم ٢ × ٣

∴ أعلى درجة لمحدد يمكن تكوينه منها هي درجة ٢

$\begin{vmatrix} ٣ & -١ \\ ١ & -١ \end{vmatrix}$ = -٣ + ١ = -٢ ≠ صفر ∴ ر ($أ^*$) = ٢ ⟵ (٢)

من (١)، (٢)

∵ ر (أ) = ر ($أ^*$) = ٢ عدد المجاهيل وهو ٢ ∴ النظام له حل وحيد.

حاول أن تحل

(٨) ابحث امكانية حل النظام ٢ س + ص =٥ ، س + ص= ٢.

مثال

(٩) ابحث امكانية حل النظام ٢س + ص = ٥ ، ٤س + ٢ص = ١٠

الحل

نوجد المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{pmatrix}$ وهي مصفوفة مربعة

∴ |أ| = $\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{vmatrix}$ = ٤ - ٤ = صفر

∴ ر (أ) = ٢-١= ١ ⟵ (١)

نوجد المصفوفة الموسعة $أ^*$ = $\left(\begin{array}{cc|c} ٢ & ١ & ٥ \\ ٤ & ٢ & ١٠ \end{array}\right)$ وهي مصفوفة على نظم ٢×٣

∴ أعلى درجة لمحدد يمكن تكوينه منها هي درجة ٢

$\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{vmatrix}$ = ٤-٤= صفر، $\begin{vmatrix} ١ & ٥ \\ ٢ & ١٠ \end{vmatrix}$ = ١٠-١٠= صفر ، $\begin{vmatrix} ٢ & ٥ \\ ٤ & ١٠ \end{vmatrix}$ = ٢٠ - ٢٠ = صفر

∵ قيمة كل من المحددات الصغرى = صفر

∴ ر ($أ^*$) < ٢ ∴ ر ($أ^*$) =١ ⟵ (٢)

من (١)، (٢) ر (أ) = ر ($أ^*$) = ١ < (أقل من ٢) عدد المجاهيل.

∴ النظام له عدد لا نهائي من الحلول وصورة الحل (ل، ٥ - ٢ل)

حاول أن تحل (٩) ص (٩٧)

ر ($أ^*$) = ر (أ) = ٢

يوجد حل وحيد هو (١، ١)

حاول أن تحل (١١) ص (٩٨)

ر ($أ^*$) = ر (أ) = ٢

يوجد عدد لا نهائى من الحلول على الصورة (ل ، ل -٣)

حاول أن تحل (١٢) ص (١٠٦)

ر ($أ^*$) = ر (أ) = ١

أقل من عدد المجاهيل

لايوجد حل على الأطلاق

المعادلات المتجانسة

يمكن القول بأن مجموعة المعادلات التى مع الصورة أ س = ☐ تسمى المعادلات المتجانسة

فإذا كان

ر (ا) = ر ($أ^*$) فإن

النظام له حل وحيد وهو الحل الصفرى

أما إذا كان

ر (ا) > ن (ن عدد المجاهيل)

ر(أ) = صفر فإنه

يوجد حل للمجموعة غير الحل الصفرى

عند عرض مثال ص ١٠٥

- ناقش مع طلابك فى كيفية الوصول إلى المطلوب وهو متى يكون للنظام حل صفرى فقط.
- وضح لطلابك أنه عند حل النظام بإيجاد محدد المصفوفة و إيجاد قيمته وهى لاتساوى صفر
- وبالنظر عن ر (أ) = ٣ = عدد المجاهيل وبالتالى تستطيع أن نقول أن النظام له حل وحيد بمعنى

س = ٠ ، ص = ٠ ، ع = ٠

حاول أن تحل

(٩) ابحث امكانية حل النظام ٣س - ٢ص = ١ ، ٦س -٤ ص=٢

ثانيًا: ندرس المعادلات الثلاثة

$أ_١$ س + $ب_١$ ص = $جـ_١$

$أ_٢$ س + $ب_٢$ ص = $جـ_٢$

$أ_٣$ س + $ب_٣$ ص = $جـ_٣$

أى أن أ س = ج

حيث أ = $\begin{pmatrix} أ_١ & ب_١ \\ أ_٢ & ب_٢ \\ أ_٣ & ب_٣ \end{pmatrix}$ ، س = $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} جـ_١ \\ جـ_٢ \\ جـ_٣ \end{pmatrix}$

يلخص الجدول الآتى الحالات المختلفة لإمكانية الحل :

ر ($أ^*$)	ر (أ)	إمكانية الحل	الحالة	المعنى الهندسى
٣	٢	لايوجد حل على الاطلاق	تقاطع المستقيمات ازواجا أو يتوازى أثنان و يتقاطعان مع الثالث	
٢	٢	يوجد حل وحيد	تتقاطع المستقيمات فى نقطة واحدة	
٢	١	لايوجد حل على الاطلاق	تتوازى جميع المستقيمات	
١	١	يوجد عدد لانهائى من الحلول	تنطبق المستقيمات جميعًا	

مثال

(١٠) ابحث امكانية حل المعادلات الآتية و اكتب الحل إن وجد س + ص = ٢ ، ٢ س + ٣ص = ٥ ، ٣ س - ٢ص = ١

الحل

أ = $\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٣ \\ ٣ & ٢- \end{pmatrix}$ ، $\begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix}$ = ٣ - ٢ = ١ ≠ ٠ ، ر (أ) = ٢

$أ^*$ = $\begin{pmatrix} ١ & ١ & ٢ \\ ٢ & ٣ & ٥ \\ ٣ & ٢- & ١ \end{pmatrix}$ ~ $\begin{pmatrix} ١ & ١ & ٢ \\ ٠ & ١ & ١ \\ ٠ & ٥- & ٥- \end{pmatrix}$ ~ $\begin{pmatrix} ١ & ١ & ٢ \\ ٠ & ١ & ١ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

∴ | $أ^*$ | = ٠ ، ر ($أ^*$) ≠ ٣ ، ر ($أ^*$) = ٢

∵ ر ($أ^*$) = ر(أ) = ٢   ∴ يوجد حل وحيد تحصل عليه بحل أى من معادلتين من الثلاثة

س = $أ^{-١}$ ج $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٣ & ١- \\ ٢- & ١ \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} ٢ \\ ٥ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ١ \\ ١ \end{pmatrix}$

س = ص =١

حاول أن تحل

(١٠) ابحث امكانية حل نظام المعادلات الآتى واكتب الحل إن وجد س + ص = ٢، ٢ س + ٣ ص = ٥ ، ٤ س + ٦ص = ١٠

مثال

(١١) ابحث امكانية حل نظام المعادلات الآتية واكتب الحل إن وجد س + ص = ٢ ، ٢ س + ٢ ص = ٤ ، ٥س + ٥ص = ١٠

الحل

أ = $\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٢ \\ ٥ & ٥ \end{pmatrix}$ ، ر (أ) = ١ $أ^*$ = $\begin{pmatrix} ١ & ١ & ٢ \\ ٢ & ٢ & ٤ \\ ٥ & ٥ & ١٠ \end{pmatrix}$ ر ($أ^*$) = ١

∵ ر ($أ^*$) = ر(أ) = ١ = وتنطبق المستقيمات جميعًا   ∴ يوجد عدد لانهائى من الحلول على الصورة (ل ، ٢ - ل)

حاول أن تحل

(١١) ابحث امكانية حل نظام المعادلات الآتية واكتب الحل إن وجد س - ص = ٣ ، ٢ س - ٢ ص = ٧ ، ٣س = ٥ - ٣ ص

مثال

(١٢) ابحث امكانية حل نظام المعادلات الآتي :

س + ص = ٢ ، ٢ س + ٢ ص = ٤ ، ٢ س + ٢ ص = -١

الحل

أ = $\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٢ \\ ٢ & ٢ \end{pmatrix}$ ، ر (أ) = ١ $أ^*$ = $\begin{pmatrix} ١ & ١ & ٢ \\ ٢ & ٢ & ٤ \\ ٢ & ٢ & ١- \end{pmatrix}$ ر ($أ^*$) = ٢

ر($أ^*$) > ر(أ) = ١   ∴ لايوجد حل علي الأطلاق .

حاول أن تحل

(١٢) ابحث امكانية حل نظام المعادلات الآتى : س + ص =٢ ، ٢ س + ٣ ص = ٥ ، س + ص = ١

المعادلات الخطية فى ثلاث مجاهيل

لنفرض مجموعة المعادلات

$أ_١$ س + $ب_١$ ص + $جـ_١$ ع = $ك_١$ $أ_٢$ س + $ب_٢$ ص + $جـ_٢$ ع = $ك_٢$

$أ_٣$ س + $ب_٣$ ص + $جـ_٣$ ع = $ك_٣$ أى أن أ س = ج

حيث

أ = $\begin{pmatrix} أ_١ & ب_١ & جـ_١ \\ أ_٢ & ب_٢ & جـ_٢ \\ أ_٣ & ب_٣ & جـ_٣ \end{pmatrix}$ ، س = $\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix}$ $أ^*$ = $\begin{pmatrix} أ_١ & ب_١ & جـ_١ & ك_١ \\ أ_٢ & ب_٢ & جـ_٢ & ك_٢ \\ أ_٣ & ب_٣ & جـ_٣ & ك_٣ \end{pmatrix}$

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

¤ ناقش مع طلابك ما ورد في بند حاول أن تحل وتوصل معهم إلى الإجابات الصحيحة.

حلول

∵ $أ = \begin{pmatrix} ٢ & ١ & ١- \\ ١ & ٠ & ١- \\ ٠ & ٢ & ١ \end{pmatrix}$ ∴ $|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ١- \\ ١ & ٠ & ١- \\ ٠ & ٢ & ١ \end{vmatrix}$

∴ $|أ| = ١ \neq ٠$ ∴ ر (أ) = ٣

= عدد المجاهيل

النظام له حل وحيد هو الحل الصفرى

(١٤) $أ = \begin{pmatrix} ٣ & ١ & ٤ \\ ٢ & ٣ & ٥ \\ ١- & ٢ & ١ \end{pmatrix}$ من النظام ٣ × ٣

$|أ|$ = صفر ∴ ر (أ) = ٢

أقل من عدد المجاهيل

يوجد للنظام عدد لا نهائى من الحلول

حلول تمارين (٣ - ٣)

(١) د (٢) أ (٣) ب (٤) د

(٥) أ (٦) ب (٧) جـ (٨) جـ

(٩) أ (١٠) أ

(١١) أ

$\begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ \\ ٠ \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}^{١-} \begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}^{١-} \begin{pmatrix} ٤ \\ ٠ \end{pmatrix}$

$\frac{١}{١} \begin{pmatrix} ٢ & ٣- \\ ٣- & ٥ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣- \\ ٣- & ٥ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٤ \\ ٠ \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٨ \\ ١٢- \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٨ \\ ١٢- \end{pmatrix}$ ∴ س = ٨، ص = ١٢

ب أ = ٢ ب = ١

جـ جـ = ٥ د = ٢

حل المعادلات الخطية باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة | ٣ - ٣

و يلخص الجدول الآتى إمكانية حل نظام المعادلات السابق و إذا كانت $ك_١ = ك_٢ = ك_٣ = ٠$ (المعادلات متجانسة فهذا لايؤثر علي مرتبة المصفوفة الموسعة أ*.

ر(أ*)	ر(أ)	إمكانية الحل
٣	٣	يوجد حل وحيد
٣	٢	لايوجد حل على الاطلاق
٣	١	لايوجد حل على الأطلاق
٢	٢	يوجد عدد لانهائى من الحلول
٢	١	لايوجد حل على الاطلاق
١	١	يوجد عدد لانهائى من الحلول

ثانيًا: المعادلات المتجانسة *Homogeneous equations*

تسمى المعادلة: $أ_١س_١ + أ_٢س_٢ + ... + أ_ن س_ن = ٠$ بالمعادلة الخطية المتجانسة، ومجموعة المعادلات الخطية المتجانسة تكتب بالصورة أ س = ▭ وتتميز المعادلات الخطية المتجانسة عن المعادلات غير المتجاسة بأنه دائما تكون مرتبة مصفوفة المعاملات أ هى نفسها مرتبة المصفوفة الموسعة أى:

١ - إذا كان عدد المجاهيل = ن ر (أ) = ر(أ*) فيكون للنظام حل وحيد وهو $س_١ = س_٢ = س_٣ = .. = س_ن$ = صفر ويسمى بالحل الصفرى (البديهى لكونه شديد الوضوح)

٢ - إذا كانت مرتبة مصفوفة المعاملات أقل من عدد المجاهيل أى:

ر (أ) = > ن (حيث ن عدد المجاهيل)، | أ | = صفر فإنه يوجد للمجموعة عدد لا نهائى من الحلول بخلاف الحل الصفرى»

مثال

(١٣) بَيِّن أن للنظام ٣س - ٢ص + ٥ع= ٠ ، س+ص=٠ ، ص - ع = ٠ حلًّا صفريًا فقط.

الحل

$أ = \begin{pmatrix} ٣ & ٢- & ٥ \\ ١ & ١ & ٠ \\ ٠ & ١ & ١- \end{pmatrix}$ وهي مصفوفة مربعة على نظم ٣ × ٣

∴ $|أ| = \begin{vmatrix} ٣ & ٢- & ٥ \\ ١ & ١ & ٠ \\ ٠ & ١ & ١- \end{vmatrix}$ باستخدام عناصر العمود الأول

∴ $|أ|$ = ٣ (-١ - ٠) -١(-١ - ٠) + صفر (٠- ٥)

$|أ|$ = -٣ + ١ = -٢ ≠ صفر ∴ ر (أ) = ٣ = عدد المجاهيل

∴ النظام له حل وحيد وهو الحل الصفري وهو س=٠، ص=٠، ع=٠ فتكون مجموعة الحل = {(٠، ٠ ، ٠)}

حاول أن تحل

(١٣) بين أن للنظام ٢س + ص - ع=٠ ، س - ع=٠ ، ٢ص + ع = ٠ حلًّا صفريًا فقط.

٩٩ كتاب الجبر والهندسة الفراغية - الجبر

الوحدة الثالثة: المحددات والمصفوفات

مثال

(١٤) بين أن للنظام ٣س + ص + ٤ع=٠ ، ٢س + ٣ص + ٥ع=٠ ، -س + ٢ص + ع=٠ عددًا لا نهائيًا من الحلول وأوجد صورة هذا الحل.

الحل

نوجد $أ = \begin{pmatrix} ٣ & ١ & ٤ \\ ٢ & ٣ & ٥ \\ ١- & ٢ & ١ \end{pmatrix}$ وهي مصفوفة مربعة على نظم ٣ × ٣

∴ $|أ| = \begin{vmatrix} ٣ & ١ & ٤ \\ ٢ & ٣ & ٥ \\ ١- & ٢ & ١ \end{vmatrix}$ = صفر، حيث $ع_٣ = ع_١ + ع_٢$ ∴ ر (أ) =٢

∵ ر (أ) =٢ (أقل من ٣) عدد المجاهيل

∴ للنظام عدد لا نهائي من الحلول على الصورة (ل، م ، ل -٢م).

حاول أن تحل

(١٤) بين أن للنظام ٢س+ ٣ص+ ٥ ع = ٠، ٧س + ٤ص -٢ع=٠ ، ٦س + ٩ص + ١٥ع = صفر عددًا لا نهائيًا من الحلول من واكتب صورة الحل.

تمارين (١ – ٣)

أولًا: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) من بين الأنظمة الخطية الآتية، مجموعة المعادلات المتجانسة هى:

أ ٢س + ص = ٣ ، س + ٢ص = ٢ ب س - ص = ٠ ، س + ٢ص = ١٢

جـ ٣س + ص = ١ ، ٢س + ص = ٠ د س - ٢ص = ٠ ، ٣س + ص = ٠

(٢) إذا كان $\begin{pmatrix} ٢ & ١- \\ ١ & ٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ \\ ٤ \end{pmatrix}$ فإن $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$ تساوى:

أ $\begin{pmatrix} ٢ \\ ١ \end{pmatrix}$ ب $\begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \end{pmatrix}$ جـ $\begin{pmatrix} ٢ \\ ٣ \end{pmatrix}$ د $\begin{pmatrix} ٣ \\ ٢ \end{pmatrix}$

(٣) إذا كانت $أ = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٤ \\ ٤ & ٨ & ١٦ \end{pmatrix}$ فإن ر (أ) =

أ صفر ب ١ جـ ٢ د ٣

(٤) مرتبة مصفوفة الوحدة $I_٣$

أ ٣ ب ٢ جـ ١ د صفر

(٥) مرتبة المصفوفة ▭ من النظم ٣ × ٣

أ صفر ب ١ جـ ٢ د ٣

١٠٠ الصف الثالث الثانوى - كتاب الطالب

د) ب = ٧، جـ = صفر ، د = -١

هـ) س = ١ ، ص = -١ ، ع = ٢

و) س = ١ ، ص = ٢ ، ع = ٣

١٢) $أ^* \left(\begin{array}{c|ccc} ٠ & ٣ & ١ & ٢ \\ -١ & ٠ & ١ & ١ \\ ٣ & ٢ & ١ & ٠ \end{array}\right)$

س = $أ^{-١}$ ج

س = $\frac{١}{٥} \begin{pmatrix} ٢ & ١ & -٣ \\ -٢ & ٤ & ٣ \\ ١ & -٢ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٠ \\ -١ \\ ٣ \end{pmatrix}$

س = $\frac{١}{٥} \begin{pmatrix} -١٠ \\ ٥ \\ ٥ \end{pmatrix}$ ∴ س = -٢ ، ص = ١، ع = ١

١٣) ب) $أ^* = \left(\begin{array}{c|ccc} ٠ & ٢ & -٢ & ١ \\ ٠ & ٤ & ٠ & ٣ \\ ٠ & ٦ & -١ & ٠ \end{array}\right)$ ، $أ = \begin{pmatrix} ٢ & -٢ & ١ \\ ٤ & ٠ & ٣ \\ ٦ & -١ & ٠ \end{pmatrix} \neq ٠$

ر (أ) = ر ($أ^*$) = ٢

∴ يوجد عدد لأنهائى من الحلول

جـ) $أ = \begin{pmatrix} -٢ & -٥ & ٣ \\ ٣ & ١ & ٤ \\ ٢ & ٣ & -١ \end{pmatrix}$ ، |أ| ≠ ٠

ر (أ) = ٣ ، ر (أ) = ر ($أ^*$) = ٣

١٣) - $ع_١$ + $ع_٢$ ، -س $ع_١$ + $ع_٣$ اكمل

- $ص_١$ + $ص_٢$ ، - $ص_١$ + $ص_٣$ اكمل

٢٤) $أ^* = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٣ & -١ & ٢ \\ ٣ & ٢ & ٣ \end{vmatrix}$ ر (أ) = ٣

$أ^* \left(\begin{array}{c|ccc} ١ & ١ & ١ & ١ \\ -٥ & ٣ & ١ & ٢ \\ ٠ & ٣ & ١ & ٣ \end{array}\right)$

ر (أ) = ر ($أ^*$) ∴ يوجد حل وحيد

س = -٤ ، ص = ٣ ، ع = ٢

٢٧) $أ = \begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٢ & ٣ & ٢ \\ ٠ & -١ & ١ \end{pmatrix}$ ر (أ) = ٣

$أ^* \left(\begin{array}{c|ccc} ١ & ١ & ١ & ١ \\ ٠ & ٢ & ٣ & ٢ \\ ٣ & ٠ & -١ & ١ \end{array}\right)$

ر (أ) = ر ($أ^*$) ∴ يوجد الحل وحيد

س = ١، ص = -٢، ع = ٢

٦) إذا كان $أ = \begin{pmatrix} ٣ & -٢ & ١ \\ ١ & ٠ & ك \\ -١ & ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ وكان ر (أ) = ٢ فإن ك =

أ) -٢ ب) صفر جـ) ٢ د) ٦

٧) إذا كان م عدد المعادلات الخطية، ن عدد المجاهيل فإن المصفوفة الموسعة تكون على النظم

أ) م × ن ب) م × (ن + ١) جـ) (م + ١) × ن د) (م + ١) (ن + ١)

٨) مرتبة المصفوفة الموسعة للنظام: ٢س - ٣ص = ٥ ، ٦س - ٩ص = ١٥ هى

أ) صفر ب) ١ جـ) ٢ د) ٣

٩) عدد حلول النظام: ٢س + ٥ص = ٠ ، ٣س - ص = ٠ هو

أ) الحل الصفرى فقط. ب) لا يوجد حل على الإطلاق.

جـ) عدد نهائى من الحلول عدا الحل الصفرى. د) لا يوجد حل على الإطلاق.

١٠) يوجد للنظام $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ٢ \\ -٣ & -٢ & ١ \\ -٣ & -٢ & ٤ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \square$

أ) الحل التافه ب) عدد لانهائى من الحلول.

جـ) عدد نهائى من الحلول عدا الحل الصفرى د) لايوجد حل على الإطلاق.

أجب عن الأسئلة الآتية:

١١) حل المعادلات المصفوفية الآتية:

أ) $\begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ \\ ٠ \end{pmatrix}$ ب) $\begin{pmatrix} -١ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} أ \\ ب \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ \\ ٤ \end{pmatrix}$ جـ) $\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ -١ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} جـ \\ ء \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ \\ ٣ \end{pmatrix}$

د) $\begin{pmatrix} ٢ & ٠ & ١ \\ -١ & ١ & ٠ \\ ٠ & ١ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ب \\ جـ \\ ء \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ \\ ١ \\ ٧ \end{pmatrix}$ هـ) $\begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ \\ -١ & -١ & ٢ \\ -١ & ٢ & ٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \\ ١ \\ -١ \end{pmatrix}$ و) $\begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & -١ & ٢ \\ -١ & ١ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦ \\ ٣ \\ ٠ \end{pmatrix}$

١٢) اكتب مصفوفة موسعة لنظام المعادلات الآتى، ثم حل هذا النظام باستخدام طريقة معكوس المصفوفة:

أ) ٢س + ص + ع = ٠ ، ٣س + ٢ص + ٣ع = ١٢ ، ٤س + ص + ٢ع = -١

ب) س + ٣ص + ٢ع = ٠ ، س + ع = -١ ، س + ٢ص = ٣

جـ) ٢س + ص + ٣ع = ٠ ، س + ص = -١ ، ص + ٢ع = ٣

د) ٤س + ٣ص - ٥ع = ٦ ، ٣س + ٢ص + ٤ع = ١٢

١٣) بَيِّن أن للأنظمة الآتية حلًّا صفريًّا فقط:

أ) ٢س + ٧ص + ٣ع = ٠ ، ٣س + ص - ٢ع = ٠ ، ٤س - ٣ص - ع = ٠

ب) س - ٢ص + ٢ع = ٠ ، ٣س + ٤ع = ٠ ، ٦ع - ص = ٠

جـ) س + ٢ص - ع = ٠ ، ٢س + ٣ص - ع = ٠ ، ٣س - ٤ص + ٢ع = ٠

١٤) بَيِّن أن للأنظمة الآتية عددًا لانهائيًّا من الحلول واكتب صورة الحل.

أ) س + ٢ص + ٣ع = ٠ ، ٢س + ٣ص + ٥ع = ٠ ، ٣س - ص + ٢ع = ٠

ب) ٢س - ص + ٣ع = ٠ ، ٤س - ٢ص + ٦ع = ٠ ، س + ٢ع = ٠

جـ) ٣س - ٥ص - ٢ع = ٠ ، ٢س + ص + ٣ع = ٠ ، -س + ٣ص + ٢ع = ٠

١٥) الربط بالتجارة: تبيع إحدى المكتبات ثلاثة أنواع من الكشاكيل (Patch work) النوع (أ) بسعر ١٠ جنيهات، والنوع (ب) بسعر ١٥ جنيهًا والنوع (جـ) بسعر ٢٠ جنيهًا، فإذا باعت المكتبة ٥٢ كشكولًا فى أسبوع وكان عدد الكشاكيل من النوع (أ) يزيد عن عدد الكشاكيل من النوع (ب) بمقدار ٨ وكان إجمالى المبيعات ٧٢٠ جنيهًا فكم عدد الكشاكيل المبيعة من كل نوع؟

ملخص الوحدة

- المحدد: المحدد من الدرجة ن يتكون من ن من الصفوف ، ن من الأعمدة وينشأ من حذف (ن – ١) من المتغيرات فى ن من المعادلات الخطية .
- خواص المحددات:
  - لا تتغير قيمة المحدد إذا تبدلت الصفوف بالأعمدة والأعمدة بالصفوف بنفس ترتيبها.
  - إذا ضربت جميع عناصر أى صف (عمود) من محدد فى عدد حقيقى ك فإن قيمة المحدد الناتج = ك × قيمة المحدد الأصلى، والعكس إذا وُجِدَ عامل مشترك فى جميع عناصر أى صف "أو أى عمود " فى محدد فإن هذا العامل يمكن أخذه خارج العمود "مضروبًا فيه"
  - قيمة المحدد تساوى صفر فى الحالات الآتية:
    - ✔ إذا كانت جميع عناصر أى صف أو (أى عمود) فى محدد تساوى صفر فإن قيمة المحدد = صفر.
    - ✔ إذا تساوت العناصر المتناظرة فى أى صفين (أو عمودين) فى محدد فإن قيمة المحدد = صفر.
  - إذا بدلنا موضع صفين (عمودين) فإن المحدد الناتج =-١ × المحدد الأصلى.
  - إذا كتبت جميع عناصر أى صف "عمود" كمجموع عنصرين فإنه يمكن كتابة المحدد الأصلى على صورة مجموع محددين .
  - إذا أضفنا لعناصر أى صف "عمود" العناصر المناظرة لها من صف "عمود" آخر مضروبة فى عدد مثل م فإن قيمة المحدد لا تتغير .
  - قيمة المحدد على الصورة المثلثة تساوى حاصل ضرب عناصر القطر الرئيس .

حلول تمارين عامة

(١) صفر (٢) ١٠ (٣) صفر (٤) صفر

(٥) صفر (٦) صفر (٧) صفر (٨) -٢

(٩) ± ٣ (١٠) $\begin{pmatrix} ٢- & ٤ \\ ٥ & ١٠ \end{pmatrix}$

(١٤) ع١ + ع٢ + ع٣ ← ع٢

$$\begin{vmatrix} \text{جـ أ + أ ب + ب جـ} & \text{ب جـ} & ١ \\ \text{جـ أ + أ ب + ب جـ} & \text{جـ أ} & ١ \\ \text{جـ أ + أ ب + ب جـ} & \text{أ ب} & ١ \end{vmatrix}$$

$$= (\text{جـ أ + أ ب + ب جـ}) \begin{vmatrix} ١ & \text{ب جـ} & ١ \\ ١ & \text{جـ أ} & ١ \\ ١ & \text{أ ب} & ١ \end{vmatrix}$$

ع١ ≡ ع٣ $\therefore \Delta =$ صفر

(١٥) ع١ + ع٢ + ع٣ ← ع١

$$= ٢(\text{س + ص + ١}) \begin{vmatrix} \text{ص} & \text{س} & ١ \\ \text{ص} & \text{٢س + ص + ١} & ١ \\ \text{س + ٢ص + ١} & \text{س} & ١ \end{vmatrix}$$

٢(س + ص + ١) (س + ص + ١)^٢

= ٢(س + ص + ١)^٣

تمارين عامة

أولًا: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) $\begin{vmatrix} ٢٦ & ٢٥ & ٢٤ \\ ٢٩ & ٢٨ & ٢٧ \\ ٣٢ & ٣١ & ٣٠ \end{vmatrix} =$ ....

(أ) صفر (ب) ١٢ (ج) ٢٤ (د) ٥٦

(٢) مجموعة حل المعادلة $\begin{vmatrix} ٠ & ٥ & ٢ \\ ٠ & \text{س} & ٤ \\ ٥ & ٧ & \text{س} \end{vmatrix} =$ صفر هى ....

(أ) {٢} (ب) {٥} (ج) {٧} (د) {١٠}

(٣) $\begin{vmatrix} ٥ & \frac{١}{٢} & ١- \\ ١٠ & ٨ & ٦ \\ ١٠- & ١- & ٢ \end{vmatrix} =$ ....

(أ) ١٠- (ب) ١- (ج) صفر (د) ١٠

(٤) $\begin{vmatrix} ٣^{١٧} & ٣^{١٦} & ٣^{١٥} \\ ٣^{١٨} & ٣^{١٧} & ٣^{١٦} \\ ٣^{٢٠} & ٣^{١٩} & ٣^{١٨} \end{vmatrix} =$ ....

(أ) صفر (ب) $٣^{١٥}$ (ج) $٣^{١٦}$ (د) $٣^{١٧}$

(٥) $\begin{vmatrix} ٢٠١٨ & ٢٠١٧ & ٢٠١٦ \\ ٢ & ٤ & ٦ \\ ٢٠١٧ & ٢٠١٥ & ٢٠١٣ \end{vmatrix} =$ ....

(أ) ٢- (ب) ١- (ج) صفر (د) ١

(٦) $\begin{vmatrix} \text{أ + جـ} & \text{جـ + ب} & \text{أ + ب} \\ \text{ب} & \text{أ} & \text{جـ} \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix} =$ ....

(أ) ١- (ب) صفر (ج) أ + ب + جـ (د) أ ب جـ

(٧) فى الشكل المقابل $\overline{\text{ء هـ}} // \overline{\text{ب جـ}}$

$\begin{vmatrix} ٧ & ٦ & ٥ \\ \text{أ هـ} & \text{أ ء} & \text{ء هـ} \\ \text{أ جـ} & \text{أ ب} & \text{ب جـ} \end{vmatrix} =$ ....

أ، ء، هـ، ب، جـ

(أ) ٧ (ب) ٦ (ج) ٥ (د) صفر

(٨) مجموعة حل المعادلة $\begin{vmatrix} \text{٤ - ٣س} & ٥ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} =$ صفر هى: ....

(أ) ٤- (ب) ٢- (ج) ٢ (د) ٣

(٩) قيمة س التى تجعل المصفوفة $\begin{pmatrix} ٢ & \text{س - ١} \\ \text{س + ١} & ٤ \end{pmatrix}$ منفردة هى:

(أ) ٣- (ب) ٣ (ج) ± ٣ (د) ٩

(١٠) جميع المصفوفات الآتية ليس لها معكوس ضربى ما عدا المصفوفة :

(أ) $\begin{pmatrix} ٦- & ٣ \\ ٤ & ٢- \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٦ & ٢ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} ٨- & ٤ \\ ٤- & ٢ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٢- & ٤ \\ ٥ & ١٠ \end{pmatrix}$

(١١) إذا كانت المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} ٣- & ٢- & ١ \\ ٦ & ٤ & ٢- \\ ٩- & ٦- & ٣ \end{pmatrix}$ فإن ر(أ) =

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٣

(١٢) حل المصفوفة $\begin{pmatrix} ١ & ٢- & ٢ \\ ١,٥- & ٦ & ٣- \\ ٢ & ٨- & ٤ \end{pmatrix}$ هو :

(أ) الحل الصفرى. (ب) لا يوجد حل على الإطلاق.

(ج) عدد لا نهائى من الحلول. (د) عدد لا نهائى من الحلول عدا الحل الصفرى.

ثانيًا: أجب عن الأسئلة الآتية:

بدون فك أى من المحددات الآتية أثبت أن:

(١٣) $\begin{vmatrix} \text{جـ} & \text{ب} & ١ \\ \text{ب جـ} & \text{١ + ب}^٢ & \text{ب} \\ \text{١ + جـ}^٢ & \text{ب جـ} & \text{جـ} \end{vmatrix} = ١$

(١٤) $\begin{vmatrix} \text{جـ أ + أ ب} & \text{ب جـ} & ١ \\ \text{أ ب + ب جـ} & \text{جـ أ} & ١ \\ \text{ب جـ + جـ أ} & \text{أ ب} & ١ \end{vmatrix} =$ صفر

(١٥) $\begin{vmatrix} \text{ص} & \text{س} & \text{س + ص + ٢} \\ \text{ص} & \text{٢س + ص + ١} & ١ \\ \text{س + ٢ص + ١} & \text{س} & ١ \end{vmatrix} =$ ٢(س + ص + ١)^٣

(١٨) $\text{ع}_١ + \text{ع}_٢ + \text{ع}_٣ \leftarrow \text{ع}_١$

$$= (\text{س} + ٢\text{أ}) \begin{vmatrix} ١ & \text{س} & \text{أ} \\ ١ & \text{س} & \text{أ} \\ ١ & \text{أ} & \text{س} \end{vmatrix}$$

$\text{ص}_٢ + \text{ص}_١ \leftarrow \text{ص}_١ ، \text{ص}_٣ + \text{ص}_١ \leftarrow \text{ص}_٢$

$$= (\text{س} + ٢\text{أ}) \begin{vmatrix} ١ & \text{أ} & \text{أ} \\ ٠ & \text{س} - \text{أ} & ٠ \\ ٠ & ٠ & \text{س} - \text{أ} \end{vmatrix}$$

$(\text{س} - ٢\text{أ}) (\text{س} - \text{أ}) (\text{س} - \text{أ})$

$\triangle = (\text{س} + ٢\text{أ}) (\text{س} - \text{أ})^٢$

(٢٠) $\text{س} = ١$ تجعل $\triangle$ = صفر

$$\begin{vmatrix} ٠ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ٢ \\ ١- & ١ & ١ + \text{ك} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

$\text{ص}_٢ \leftarrow \text{ص}_٢ + \text{ص}_٣$

$$\begin{vmatrix} ٠ & ١ & ١ \\ ٠ & ٢ & ٣ + \text{ك} \\ ١- & ١ & ١ + \text{ك} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

$-١ \, (٣ + \text{ك} - ٢) = \text{صفر}$

$\text{ك} = -١$

الوحدة الثالثة: المحددات والمصفوفات

(١٦) $\begin{vmatrix} ١ & ١ & \text{س} \\ -٢\text{س} + ٢\text{س}^٢ & ١ + ٢\text{س}^٢ & ٢\text{س}^٣ \\ -٣ + ٢\text{س}^٢ & ٣\text{س}^٢ & ١ + ٣\text{س}^٣ \end{vmatrix} = ١ + ٢\text{س} + ٣\text{س}^٢$

(١٧) $\begin{vmatrix} ١ & -٢\text{جـ} + ٢\text{جـ}^٢ & -٣\text{جـ} + ٣\text{جـ}^٢ \\ ١ & ١ + ٢\text{جـ}^٢ & ٣\text{جـ}^٢ \\ \text{جـ} & ٢\text{جـ}^٣ & ١ + ٣\text{جـ}^٣ \end{vmatrix} = ١ + ٢\text{ج} + ٣\text{جـ}^٢$

(١٨) $\begin{vmatrix} \text{س} + \text{أ} & \text{س} + \text{أ} & \text{أ}^٢ \\ \text{أ} & \text{س} & \text{أ} \\ ٠ & \text{أ} - \text{س} & \text{س} - \text{أ} \end{vmatrix} = (\text{س} + ٢\text{أ}) (\text{س} - \text{أ})^٢$

(١٩) $\begin{vmatrix} ١ & \text{أ} & \text{ب جـ} \\ ١ & \text{ب} & \text{جـ أ} \\ ١ & \text{جـ} & \text{أ ب} \end{vmatrix} = (\text{أ} - \text{ب}) (\text{ب} - \text{جـ}) (\text{جـ} - \text{أ})$

(٢٠) إذا كان (س – ١) أحد عوامل المحدد $\begin{vmatrix} \text{س} - ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & \text{س} + ١ \\ ١- & ١ & \text{س} + \text{ك} \end{vmatrix}$ أوجد قيمة ك

(٢١) أوجد قيمة ك بحيث تكون س عاملًا للمحدد $\begin{vmatrix} \text{س} + \text{أ} & ٣ & ١ \\ \text{ك} & ٢ & ٣ \\ \text{س} & ٢ & ١ \end{vmatrix}$

(٢٢) أوجد قيم ك التى تجعل (س – ٢) أحد عوامل المحدد:

$\begin{vmatrix} \text{س} + ١ & ١ & ٣- \\ ٢ & ٥ & \text{س} - ١ \\ ١ & ٤- & \text{س} + \text{ك} \end{vmatrix}$

ثالثًا: ابحث إمكانية حل كل من المعادلات الآتية وأوجد الحل الوحيد إن وُجِدَ:

(٢٣) س + ٢ص + ع = ٣ ، ٤س – ص – ع = ٦ ، س + ص + ٣ع = ١٠

(٢٤) س + ص + ع = ١ ، ٢س – ص + ٣ع = - ٥ ، ٣س + ٢ص + ٣ع = صفر

(٢٥) س + ٢ص – ٣ع = ٠ ، ع - س – ٢ ص = ٠ ، ٢س + ٤ص – ٦ع = ٠

(٢٦) ٢س + ٣ص - ع = ٠ ، ٣س + ص + ٢ع = ، ع – س – ٢ص = ٠

(٢٧) $\begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٢ & ٣ & ٢ \\ ١ & ١- & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ ٠ \\ ٣ \end{pmatrix}$

(٢٨) $\begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ٣- & ١ \\ ٣ & ٢ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \\ ٦ \\ ٣ \end{pmatrix}$

(٢٩) $\begin{pmatrix} ٢ & ٤- & ٦- \\ ١- & ٢ & ٣ \\ ٣- & ٦ & ٩ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ ٠ \\ ١- \end{pmatrix}$

١٠٦ الصف الثالث الثانوى – كتاب الطالب

تمارين عامة

(٣٠) نشاط: الربط بالسياحة: تمتلك شركة سياحية ثلاثة فنادق متماثلة فى أحد المنتجعات السياحية، تحتوى الفنادق الثلاثة على نفس العدد من الغرف والأسِرَّة، فإذا تمَّ شَغْلُ جميع الأسِرَّة للفنادق الثلاثة وفقًا للجدول التالى الذى يبين تقسيمات الغرف وسعر السرير الواحد بالدولار الأمريكى .

	غرفة بـ ٢ سرير	غرفة بـ ٣ سرير	غرفة بـ ٤ سرير	الدخل بالدولار
الفندق (أ)	٢٠٠	١٥٠	١٠٠	١٢٥٠٠
الفندق (ب)	١٨٠	١٤٠	٩٠	١١٤٠٠
الفندق (جـ)	٢٤٠	٢٠٠	١٦٠	١٧٢٠٠

أ) اكتب مصفوفة موسعة تُمثِّل البيانات المعطاة بالجدول.

ب) أوجد مرتبة كل من مصفوفة المعاملات والمصفوفة الموسعة، ثم ابحث إمكانية حل المعادلات الخطية لهذا النظام.

جـ) أوجد عدد الأسِرَّة فى كل من الغرف الثنائية والثلاثية والرباعية (يمكنك استخدم الآلةالحاسبة العلمية فى حل المعادلات).

د) إذا استمرَّ شغل جميع الأماكن فى الفنادق الثلاثة بنفس الأسعار المحددة، فأوجد دخل كل فندق خلال أسبوع واحد.

هـ) تعتبر السياحة من أهم مصادر الدخل القومي في مصر .. اكتب بحثًا عن ذلك مستخدمًا الشبكة العنكبوتية للمعلومات

١٠٧ كتاب الجبر والهندسة الفراغية – الجبر

(١) ٣٥ × ٢ = ٧٠

(٢) ٦٠°

(٣) جـ

(٤) ± ٣

(٥) ٧

(٦) صفر

(٧) ح - [-١]

(٨) ١

(١٠)

$$٣س \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ أ+ب+١ & أ+ب+١ & أ+ب+١ \\ ب+١ & أ+١ & أ+ب \end{vmatrix} =$$

٣س (أ + ب + ١)

$$\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \\ ب+١ & أ+١ & أ+ب \end{vmatrix}$$

∵ ص٢ = ص١ ∴ $\triangle$ = صفر

اختبار تراكمى

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) إذا كان $\begin{vmatrix} أ & ب & جـ \\ ى & هـ & و \\ س & ص & ع \end{vmatrix}$ = ٢ فإن $\begin{vmatrix} ٥أ & ب & جـ \\ ٥ى & هـ & و \\ ٣٥س & ٧ص & ٧ع \end{vmatrix}$ = ...

(أ) ٧٠٠ (ب) ١٠ (جـ) ٣٥ (د) ٧٠

(٢) أ ب جـ مثلث، وكان $\begin{vmatrix} ب جـ & -أب \\ أب & أجـ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} أجـ & -أب \\ أب & أجـ \end{vmatrix}$ فإن ق($\hat{أ}$) = ...°

(أ) ١٢٠° (ب) ٩٠° (جـ) ٦٠° (د) ٣٠°

(٣) إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٥ \\ ٥ & ٣ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -٤ & ٣ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$ وكان أ × ج = ب فإن ج = ...

(أ) $\begin{pmatrix} -٨ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} -١١ & ٤ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} -١٧ & ٤ \\ ٦ & -١ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} -٩ & ٦ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix}$

(٤) إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٢ & س \\ س & -٢ \end{pmatrix}$ وكان ا = ا فإن س = ... تكون المصفوفة $\begin{pmatrix} ٢ & أ \\ أ & ٨ \end{pmatrix}$ منفردة إذا كانت ا =

(أ) -٤ (ب) ٤ (جـ) ±٤ (د) ١٦

(٥) إذا كان $أ^{-١}$ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$ وكان أ $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \end{pmatrix}$ فإن ص = ...

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٨

(٦) $\begin{vmatrix} أ+ب & ٥ & جـ \\ ب+جـ & ٥ & أ \\ أ+جـ & ٥ & ب \end{vmatrix}$ = ...

(أ) ٥ (ب) ٤ (جـ) ٣ (د) صفر

(٧) إذا كان للمعادلات س + ٢ص + ٣ع = ٥، ٢س - ٣ص + ك ع = ١٣ ٣س + ك ص + ٢ع = ٣ حل وحيد فإن ك ∈ ....

(أ) ح (ب) ح - {-١} (جـ) ح - {١٣} (د) ح - {-١، ١٣}

(٨) إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ & -١ \\ -٢ & -٣ & ١ \\ ٦ & ٩ & -٣ \end{pmatrix}$ فإن ر(أ) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٩) إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ١ & ١ & ٣ \\ -١ & ٠ & ٢ \\ ٢ & -٢ & ١ \end{pmatrix}$ فإن ر(أمد) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

١٠٨ الصف الثالث الثانوى - كتاب الطالب

(١١)

$$\begin{vmatrix} ٣ & ١- & ٢ \\ ٥- & ٤ & ١- \\ ١- & ٥ & ٤ \end{vmatrix}$$

=٢ (-٤ + ٢٥) + ١ (١ + ٢٠) + ٣ (-٥ - ١٦)

٤٢ + ٢١ - ٦٣ = صفر

∴ ر (أ) < ٣ ∵ $\begin{vmatrix} ٤ & ١- \\ ٥ & ٤ \end{vmatrix}$ = -٥ - ١٦ = -٢١ ≠ صفر

ر (أ) = ٢

(١٢) صفر

$$\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١+ص \\ ١ & ١+س & ١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ١+ص & ١ \\ ١+س & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ١ & ١+ص & ١ \\ س & -ص & ٠ \\ -س & ٠ & ٠ \end{vmatrix} = \text{س ص}$$

(١٧) أ = $\begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٥ & ٢- \end{vmatrix}$ = ١٥ + ٢ = ١٧ ≠ صفر   أ غير منفرده

ب = $\begin{vmatrix} ١٦ & ٨ \\ ٤ & ٢ \end{vmatrix}$ = صفر   ب منفرده

جـ = $\begin{vmatrix} ٣ & ١ & ١ \\ ١- & ١ & ٠ \\ ٤- & ٠ & ٢ \end{vmatrix}$ = ١ (-٤ - ٦) + ١ (٠ - ٢) = -١٢ ≠ صفر

ج غير منفرده

د = $\begin{vmatrix} ٢ & ١ & ١ \\ ٤ & ٢ & ٢ \\ ٦ & ٣ & ٣ \end{vmatrix}$ = صفر حيث $ص_٣ = ٢ص_١$

∴ د مفرده

اختبار تراكمى

ثانيًا: أجب عن الأسئلة الآتية:

(١٠) بدون فك المحدد أثبت أن: $\begin{vmatrix} ٣س & ٣س & ٣س \\ ا & ب & ١ \\ ب+١ & ا+١ & ا+ب \end{vmatrix}$ = صفر

(١١) احسب مرتبة المصفوفة ا = $\begin{pmatrix} ٣ & ١- & ٢ \\ ٥- & ٤ & ١- \\ ١- & ٥ & ٤ \end{pmatrix}$

(١٢) بدون فك المحدد

أثبت أن $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١+ص \\ ١ & ١+ص & ١ \end{vmatrix}$ = س ص

(١٣) باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفات حل المعادلات الآتية:

٢س + ٢ص - ع = ٣، ٣س + ص = ٥، س + ص + ٢ع = ٩

(١٤) باستخدام خواص المحددات أثبت أن:

$\begin{vmatrix} س & س & ا+س \\ س & ب+س & س \\ جـ+س & س & س \end{vmatrix}$ = ا ب جـ + س (ا ب + ب جـ + ا جـ)

(١٥) ابحث إمكانية حل المعادلات الآتية:

س - ص + ع = ٢ ، ٢س + ٣ص - ع = ٥، ٣س - ٥ص + ٢ع = -١

(١٦) إذا كان $\begin{vmatrix} ع+٢ & ص & س \\ ع & ص+٢ & س \\ ع & ص & س+٢ \end{vmatrix}$ = -٤ أوجد قيمة س + ص + ع

(١٧) بَيِّن أيًّا من المصفوفات الآتية منفردة وأيها غير منفردة:

أ) ا = $\begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٥ & ٢- \end{pmatrix}$ ب) ب = $\begin{pmatrix} ١٦ & ٨ \\ ٤ & ٢ \end{pmatrix}$

جـ) ج = $\begin{pmatrix} ٣ & ١ & ١ \\ ١- & ١ & ٠ \\ ٤- & ٠ & ٢ \end{pmatrix}$ د) د = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ & ١ \\ ٤ & ٢ & ٢ \\ ٦ & ٣ & ٣ \end{pmatrix}$

الوحدة الأولى

الهندسة والقياس فى بعدين وثلاثة أبعاد

Geometry Measurment in two and three Dimensions

مقدمة الوحدة

يتسم العالم الذى يعيش فيه الفرد بالنوع والاختلاف ويمتاز الرياضيات بقدرتها على فهم واستيعاب الواقف والمتغيرات المختلفة فى المواقف الحياتية، وتمثل الهندسة الفراغية أحد مجالات الرياضيات التي يمكن الطالب من فهم النظم المختلفة التى يمكنه التعامل معهم سواء فى مستوى الاحداثيات الثنائية أو فى الفراغ الذى يمثله النظام ثلاثى الأبعاد. وفى هذه الوحدة يستكمل الطالب دراسته لعدد من المفاهيم التى سبق ودرستها فى بعدين ولكن تشكل أكثر توظيفية من خلال دراسة تلك المفاهيم والعلاقات فى نظام ثلاثى الأبعاد وبالتالى تطبيقات حياتية عليها.

مخرجات التعلم:

فى نهاية الوحدة وتنفيذ الأنشطة فيها من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف النظام الإحداثى ذى الثلاثة أبعاد ويحلل المتجه فى الفراغ.
- يوجد المسافة بين نقطتين فى الفراغ وإحداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة فى الفراغ.
- يوجد المعادلة الكارتزية للكرة بدلالة إحداثيات المركز وإحداثيات نقطة على الكرة.
- يتعرف على المتجهات فى الفراغ من خلال:
- تمثيل المتجه بثلاثى مرتب.
- متجهات الوحدة الأساسية فى الفراغ $\overrightarrow{\text{س}}$ = (١، ٠، ٠) ، $\overrightarrow{\text{ص}}$ = (٠، ١، ٠)، $\overrightarrow{\text{ع}}$ = (٠، ٠، ١).
- التعبير عن أى متجه بدلالة متجهات الوحدة الأساسية $\overrightarrow{\text{س}}$ ، $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ع}}$
- التعبير عن القطعة المستقيمة الموجهه فى الفراغ بدالة أحداثيات طرفيها.
- يتعرف حاصل الضرب القياسى وحاصل الضرب الاتجاهى لمتجهين فى المستوى والفراغ.
- يتعرف خواص حاصل الضرب القياسى والاتجاهى لمتجهين فى المستوى والفراغ.
- يتعرف النظام الإحداثى ذا الثلاثة أبعاد ويحلل المتجه فى الفراغ.
- يوجد المسافة بين نقطتين فى الفراغ.
- يوجد إحداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة فى الفراغ.
- يوجد المعادلة الكارتزية للكرة.
- يتعرف المتجهات فى الفراغ.
- يمثل متجهًا ثلاثيًّا مرتبًا.
- يحدد متجهات الوحدة الأساسية فى الفراغ.
- يعبر عن قيمة أى متجه قيمة بدلالة متجهات الوحدة الأساسية.
- يعبر عن نقطة سينية موجهة فى الفراغ بدلالة إحداثيات طرفيها.

ثانياً: الهندسة الفراغية

الوحدة الأولى

الهندسة والقياس فى بعدين وثلاثة أبعاد

Geometry Measurement in two and three dimensions

مقدمة الوحدة

الهندسة هى علم دراسة مختلف أنواع الأشكال وصفاتها، كما أنها دراسة علاقة الأشكال والزوايا والمسافات ببعضها وتنقسم إلى جزأين:
الهندسة المستوية: وتختص بدراسة الأشكال الهندسية التى لها بعدين فقط، المهندسة الفراغية (الفضاء): وتختص بدراسة المجسمات التى لها ثلاثة أبعاد (طول، عرض، أرتفاع) وتتعامل مع فراغات مثل متوازى المستطيلات، والمجسمات الأسطوانية، والأجسام المخروطية والكروية.
وأول من استخدم الهندسة هم الأغريق واكتشف طاليس اثباتات لبعض النظريات ثم جمع أقليدس بعد ذلك كل النتائج الهندسية ونظمها فى كتاب أطلق عليه "المبادئ" ثم تطورت بعد ذلك إلى الهندسة التحليلية وهندسة المثلثات وهندسة منكوفسكى (ذات الأربعة أبعاد) والهندسة اللا إقليدسية، وغيرها وفى هذه الوحدة سوف نتناول استخدام المتجهات فى دراسة المستقيمات والمستويات والعلاقة بينهما فى ثلاثة أبعاد.

أهداف الوحدة

فى نهاية هذه الوحدة، وبعد تنفيذ الأنشطة فيها، من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف النظام الإحداثى ذى الثلاثة أبعاد ويحلل المتجه فى الفراغ.
- يوجد المسافة بين نقطتين فى الفراغ وإحداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة فى الفراغ.
- يوجد المعادلة الكارتزية للكرة بدلالة إحداثيات المركز وإحداثيات نقطة على الكرة.
- يتعرف على المتجهات فى الفراغ من خلال:
- تمثيل المتجه بثلاثى مرتب.
- متجهات الوحدة الأساسية فى الفراغ $\overrightarrow{\text{س}}$ = (١، ٠، ٠) ، $\overrightarrow{\text{ص}}$ = (٠، ١، ٠)، $\overrightarrow{\text{ع}}$ = (٠، ٠، ١).
- التعبير عن أى متجه بدلالة متجهات الوحدة الأساسية $\overrightarrow{\text{س}}$ ، $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ع}}$
- التعبير عن القطعة المستقيمة الموجهه فى الفراغ بدالة أحداثيات طرفيها.
- يتعرف حاصل الضرب القياسى وحاصل الضرب الاتجاهى لمتجهين فى المستوى والفراغ.
- يتعرف خواص حاصل الضرب القياسى والاتجاهى لمتجهين فى المستوى والفراغ.
- يتعرف النظام الإحداثى ذا الثلاثة أبعاد ويحلل المتجه فى الفراغ.
- يوجد المسافة بين نقطتين فى الفراغ.
- يوجد إحداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة فى الفراغ.
- يوجد المعادلة الكارتزية للكرة.
- يتعرف المتجهات فى الفراغ.
- يمثل متجهًا ثلاثيًّا مرتبًا.
- يحدد متجهات الوحدة الأساسية فى الفراغ.
- يعبر عن قيمة أى متجه قيمة بدلالة متجهات الوحدة الأساسية.
- يعبر عن نقطة سينية موجهة فى الفراغ بدلالة إحداثيات طرفيها.

١١٠ الصف الثالث الثانوى - كتاب الطالب

مصطلحات أساسية

- فراغ space
- ثلاثى الأبعاد 3D
- مقسط projection
- قاعدة اليد اليمنى right hand Rule
- متجه ثلاثى الرتب vector trio ranks
- مستوى plane
- ضرب قياسي scalar product
- ضرب اتجاهي vector produvt
- مركبة المتجه component
- الشغل work
- الضرب الثلاثى القياسى scalar trople product
- متجه الوضع positiouvectorin
- متجه الوحدة unit vector space
- معيار المتجه the norm of cector

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية

دروس الوحدة

الدرس (١ - ١): النظام الإحداثى المتعامد فى ثلاثة أبعاد.

الدرس (١ - ٢): المتجهات فى الفراغ.

الدرس (١ - ٣): ضرب المتجهات.

مخطط تنظيمى للوحدة



كتاب الجبر والهندسة الفراغية - الهندسة الفراغية ١١١

زمن تدريس الوحدة :

(٩ حصص)

مهارات التفكير التى تنميها الوحدة:

التفكير التحليلى - حل المشكلات - التفكير الناقد - التفكير التأملى.

الوسائل التعليمية المستخدمة:

السبورة التعليمية - نماذج مجسمة - طباشير ملون - اقلام ملونة.

طرق التدريس المقترحة:

الطريقة المباشرة - التعلم التعاونى - حل المشكلات - المناقشة - العصف الذهنى الأكتشاف.

طرق التقييم المقترحة

اسئلة شفهية وتحريرية - فردية وجماعية - الأنشطة المفتوحة - تمارين عامة - مشكلات حياتية - اختبار تراكمي.

المخطط التنظيمى للوحدة

يوضح المخطط التنظيمى للوحدة:

- عدد من المفاهيم المرتبطة بالنظام الاحداثى ثلاثى الأبعاد مثل الفراغ وموضع جسم أو نقطة فى الفراغ والمتجهات والعمليات عليها والمعنى الهندسى للعمليات على المتجهات

١ - ١ النظام الاحداثى المتعامد فى ثلاث ابعاد

The three dimensional orthogo coord

خلفية:

سبق أن درس الطالب النظام الاحداثى المتعامد فى بعدين ودراسة خصائص العديد من الاشكال والعلاقات بين الخطوط فى هذا النظام وفى درس اليوم سيتعرف على العديد من المفاهيم والعلاقات ولكن نظام احداثى متعامد ثلاثى الأبعاد.

مخرجات الدرس:

فى نهاية هذا الدرس وتنفيذ الأنشطة فيه من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يحدد موقع نقطة فى النظام الاحداثى ثلاثى الأبعاد.
- يعين احداثيات منتصف قطعة مستقيمة تصل بين نقطتين فى الفراغ.
- إيجاد البعد بين نقطتين فى الفراغ.
- إيجاد معادلة الكرة فى الفراغ

مفردات اساسية

فراغ - ثلاثى الابعاد - مسقط مستوى - قاعدة اليد اليمنى

المواد التعليمية المستخدمة:

سبورة تعليمية - طباشير ملون - نماذج مجسمة - سبورة مربعات.

طرق التدريس المقترحة:

العرض المباشر - المناقشة - حل المشكلات - التعلم التعاونى.

مصادر التعليم:

كتاب الطالب من ص١٢٠ إلى ص ١٢٧.

الوحدة الأولى

١ - ١ النظام الإحداثى المتعامد فى ثلاثة أبعاد

The three- dimensional orthogonal coordinate system

سوف تتعلم

- تحديد موقع نقطة فى النظام الإحداثى ثلاثي الأبعاد.
- تعيين إحداثيات منتصف قطعة مستقيمة تصل بين نقطتين فى الفراغ.
- إيجاد البعد بين نقطتين فى الفراغ.
- معادلة الكرة فى الفراغ.

مصطلحات أساسية

- فراغ space
- ثلاثي الأبعاد 3d
- مسقط projection
- قاعدة اليد اليمنى right hand rule
- مستوى plane

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية Scientific calculator

فكر وناقش

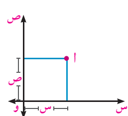
- لتحديد موضع جسم على خط مستقيم يلزم معرفة بُعد هذا الجسم عن نقطة ثابتة (اختيارية) عليه، وتسمى نقطة الأصل (و).

و أ = س ∈ ح



- لتحديد موضع جسم فى مستوى يلزم معرفة مسقط هذا الجسم على محوري إحداثيات متعامدة.

أ = (س، ص) ∈ ح^{2}



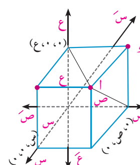
- كيف يمكنك تحديد موضع جسم فى الفراغ؟

تعلم

النظام الإحداثى المتعامد فى ثلاثة أبعاد (ح^{3})

the three- dimensional orthogonal coordinate system (R^3)

تتعين إحداثيات النقطة أ فى الفراغ بالنسبة إلى ثلاثة محاور متقاطعة فى نقطة واحدة ومتعامدة مثنى مثنى، وذلك بإيجاد مسقط هذه النقطة على كل محور.



فكر: فى النظام الإحداثى السابق، أوجد إحداثيات كل من النقط ب، جـ، ى

١١٢ الصف الثالث الثانوى - كتاب الطالب

تهيئة:

- فى بند فكر ناقش ص (١٢٠) ذكر الطلاب ببعض العلاقات التى سبق وتم دراستها فى السنوات السابقة وساعدهم فى تعرف كيفية تحديد موضع جسم على خط مستقيم، وأكد على التدرج الحادث فى المستويات فمثلاً عند تحديد موضع جسم بالنسبة لخط مستقيم فإننا نتحدث عن مستوى احادى أما فى حالة تحديد موضعه فى مستوى فإننا نتحدث عن احداثين متعامدين ولذا عندما نبحث عن موضعه فى الفراغ فإننا نتحدث عن مستوى احداثى متعامد ثلاثى الابعاد.

مفاهيم أساسية:

١- قاعدة اليد اليمنى

عند تكوين النظام الإحداثى المتعامد فى ثلاثة أبعاد يجب اتباع قاعدة اليد اليمنى؛ حيث تشير أصابع اليد المنحنية إلى الاتجاه الموجب لمحور ص، ويشير اتجاه الإبهام إلى الاتجاه الموجب لمحور ع.

٢- مستويات الإحداثيات

- جميع النقط فى الفراغ التي إحداثياتها (س، ص، ٠) تقع فى المستوى الإحداثى س ص وتكون معادلته ع = صفر
- جميع نقط الفراغ التي إحداثياتها (س، ٠، ع) تقع فى المستوى الإحداثى س ع وتكون معادلته ص = صفر
- جميع نقط الفراغ التي إحداثياتها (٠، ص، ع) تقع فى المستوى الإحداثى ص ع وتكون معادلته س = صفر

مثال (تعيين موضع نقطة فى الفراغ)

١) عين موضع كل من النقط الآتية باستخدام نظام إحداثي متعامد ثلاثي الأبعاد:

أ) أ (-٢، ٣، ٢) ب) ب (٣، -١، ٥) ج) جـ (٤، ٠، -١)

الحل

أ) لتعيين النقطة أ (-٢، ٣، ٢) نحدد النقطة (-٢، ٣) فى المستوى س ص، ثم نتحرك فى الاتجاه الموجب لمحور ع وحدتين، فنحصل على النقطة أ

ب) لتعيين النقطة ب (٣، -١، ٥) نحدد النقطة (٣، -١) فى المستوى س ص، ثم نتحرك فى الاتجاه الموجب لمحور ع ٥ وحدات، فتحصل على النقطة ب.

إجراءات الدرس

فى بند تعلم (١٢١) :

- وضح للطلاب كيفية رسم نظام يعبر عن موضع الجسم فى الفراغ وهو ما يسمى النظام الاحداثى المتعامد فى ثلاث ابعاد (طول، عرض، ارتفاع) وساعدهم على رسم هذا النظام.
- ساعدهم فى استيعاب الشكل الموضح بالاستعانة بمجسم لمتوازى مستطيلات أو مكعب لتقريب فكرة النظام ثلاثى الابعاد وبالتالى كيفية تحديد احداثيات أى نقطة فى الفراغ.

فى بند مفاهيم اساسية ص١٢١

- وضح للطلاب المقصود بقاعدة اليد اليمنى لتوضيح موضع المحاور الثلاثة الاساسية س، ص، ع وأكد على ثبات هذا الوضع وبالتالى الأزواج الثلاثية لأى نقطة فى الفراغ. ووضح إليهم وساعدهم على التميز بين الاتجاه الموجب والاتجاه السالب لكل محور من تلك المحاور الثلاثة.
- وضح للطلاب أن المحاور المتعامدة الثلاثة تكون ثلاثة مستويات ناتجة عن تقاطع لكل محورين معًا وهذا ما يطلق عليه مستويات الاحداثيات اطلب منهم شرح العلاقة بين المحورين - س ، ص والمستوى الناتج (معلومات سابقة لدى الطلاب) واستمر فى النقاش حتى يصلوا إلى ان احداثيات أى نقطة فى هذا المستوى هى (س د ص د) وانه يسمى المستوى س ص وتكون معادلته ع = صفر ، وانتقل إلى باقى المستويات حتى تتحقق من وضوح تلك المستويات بالنسبة لهم.

فى بند مثال (تعيين موضع نقطة فى الفراغ)

- اطلب من طلابك قراءة المثال ومناقشته فى المطلوب، وابدأ برسم النظام الاحداثى المتعامد فى ثلاث أبعاد على السبورة وابدأ فى ادار حوار وعصف ذهنى حول كيفية تحديد موضع نقطة فى الفراغ وضح لهم أنه فى الزواج الثلاثى (-٢، ٣، ٢) نبدأ بتحديد موضع تلك النقطة فى المستوى الاحداثى س ثم ص ثم ربط هذه النقطة بالمحور الثالث المتعامد ع كما هو موضح فى حل المثال أكد على أن بعض الاحداثيات موجبة وبعضها سالب.

⌑ أكد على أنه لتحديد موضع نقطة فى الفراغ نرسم خطوط توازى المحاور الاساسية نبدأ بتحديد موضع الاحداثى السينى على المحور س ورسم مستقيم يوازى هذا المحور من محور ص حتى نصل لنقطة التقاطع بين س، ص ثم رسم مستقيم يوازى المحور ع لنصل إلى النقطة التى تحدد الزوج الثلاثى (س، ص، ع) وهكذا.

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

فى بند حاول أن تحل ١ ، ٢ ص١٢٢:

⌑ ساعد الطلاب فى التوصل إلى الإجابات الصحيحة وذلك برسم شبكة بيانية ثلاثية الأبعاد وتوقيع النقاط المكتوبة عليها.

فى بند تعلم

⌑ البعد بين نقطتين فى الفراغ ص١٢٢. اطلب من الطلاب تذكر العلاقة الخاصة بالبعد بين نقطتين أ($س_١$، $ص_١$) ب($س_٢$، $ص_٢$) فى مستوى وساعدهم فى الوصول إلى أنه البعد بين هاتين النقطتين يعبر عنه بالعلاقة التالية

$$أ\,ب = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$$

⌑ افتح باب الحوار والمفاهيم بين الطلاب بين حول اوجه الاختلاف بين احداثيات نقطة فى مستوى واحداثياتها فى الفراغ (ثلاثى الابعاد) ويمكن الاستعانة بالمثال السابق عن كيفية تعين موضع نقطة فى الفراغ باستخدام الزوج الثلاثى لكل نقطة.

⌑ استمر فى المناقشات مع الطلاب حتى يتم التوصل إلى العلاقة الخاصة بالبعد بين نقطتين فى الفراغ وهى:

$$أ\,ب = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢ + (ع_٢ - ع_١)^٢}$$

فى بند مثال

⌑ اطلب من طلابك قراءة المثال الموضح ص١٢٢ وناقشهم في كيفية الوصول إلى المطلوب (اثبات أن المثلث قائم الزاوية) ويمكن من خلال المثال التأكيد على امكانية استخدام العلاقات والنظريات التى تم دراستها على المستوى الاحداثى ذو البعدين (المستوى) فى حل تمارين فى الفراغ ومن أمثلة ذلك العلاقة الخاصة بفيثاغورث لاثبات أن المثلث قائم الزاوية.

ج لتعيين إحداثيات النقطة جـ (٤، ٠، -١) نحدد النقطة (٤، ٠) على محور س، ثم نتحرك فى الاتجاه السالب لمحور ع وحدة واحدة.

حاول أن تحل

١ عين موضع كل من النقط الآتية باستخدام نظام إحداثي متعامد ثلاثي الأبعاد:

أ (٣، ٢، ٣)   ب (-١، ٤، ٣)   جـ (٠، ٠، ٤)

٢ أكمل

أ بُعد النقطة أ (-١، ٢، ٣) عن المستوى الإحداثى س ص = ... وحدة طول.

ب بُعد النقطة ب (٤، -٢، ١) عن المستوى الإحداثى ص ع = ... وحدة طول.

تعلم

تعلم: البعد بين نقطتين فى الفراغ *the distance between two point in space*

إذا كانت أ ($س_١$، $ص_١$، $ع_١$)، ب ($س_٢$، $ص_٢$، $ع_٢$) نقطتين فى الفراغ، فإن البُعد بين النقطتين أ، ب يعطى بالعلاقة

$$أ\,ب = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢ + (ع_٢ - ع_١)^٢}$$

مثال

٢ أثبت أن المثلث أ ب جـ حيث أ (٢، -١، ٣) ، ب(-٤، ٤ ، ٢) ، جـ (-٢، ٥، ١) قائم الزاوية فى جـ.

الحل

$أ\,ب = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢ + (ع_٢ - ع_١)^٢}$ قانون البعد بين نقطتين

$= \sqrt{(٢ + ٤)^٢ + (-١ - ٤)^٢ + (٣ - ٢)^٢} = \sqrt{٦٢}$

$ب\,جـ = \sqrt{(-٤ + ٢)^٢ + (٤ - ٥)^٢ + (٢ - ١)^٢} = \sqrt{٦}$

$أ\,جـ = \sqrt{(٢ + ٢)^٢ + (-١ - ٥)^٢ + (٣ - ١)^٢} = \sqrt{٥٦}$

١١٤ الصف الثالث الثانوى - كتاب الطالب

⌑ يمكن أن تطلب من طلابك رسم الشكل الذى يوضح كل نقطة من تلك النقاط (أ، ب، جـ) ورسم المثلث أ ب جـ للتطبيق على تحديد موضع نقطة وبالتالى شكل فى الفراغ.

$\because$ (أ ب)^٢ = $(\sqrt{٦٢})^٢$ = ٦٢، (ب جـ)^٢ + (أ جـ)^٢ = $(\sqrt{٦})^٢ + (\sqrt{٥٦})^٢$ = ٦ + ٥٦ = ٦٢

$\therefore$ (أ ب)^٢ = (ب جـ)^٢ + (أ جـ)^٢ $\qquad$ $\therefore$ ق(جـ) = ٩٠°

حاول أن تحل

(٣) أثبت أن النقط أ(٤ ،٤، ٠) ، ب(٤، ٠ ، ٤) ، جـ (٠ ، ٤ ، ٤) هى رؤوس لمثلث متساوى الأضلاع، وأوجد مساحته.

تعلم

إحداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة
The coordinates of midpoint of a line segment

إذا كانت أ(س$_١$، ص$_١$، ع$_١$)، ب(س$_٢$، ص$_٢$، ع$_٢$) نقطتان فى الفراغ، فإن إحداثيات نقطة جـ التى تقع منتصف $\overline{أب}$ هى:

$$جـ\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢}، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}، \frac{ع_١ + ع_٢}{٢}\right)$$

مثال

(٣) إذا كانت أ(١، -٣، ٢)، ب (٤، -١، ٤)، أوجد إحداثيات نقطة منتصف $\overline{أب}$

الحل

إحداثيات نقطة المنتصف $= \left(\frac{س_١ + س_٢}{٢}، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}، \frac{ع_١ + ع_٢}{٢}\right)$

$= \left(\frac{١+٤}{٢}، \frac{-٣-١}{٢}، \frac{٢+٤}{٢}\right)$

$= \left(\frac{٥}{٢}، -٢، ٣\right)$

حاول أن تحل

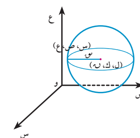
(٤) أوجد إحداثيات نقطة منتصف $\overline{جـ ء}$ حيث جـ (٠، ٤، -٢)، ء (-٦، ٣، ٤)

تفكير ناقد: إذا كانت جـ (٢، ٢، ٦) هى نقطة منتصف $\overline{أب}$ حيث أ (١، -٤ ، ٠) أوجد إحداثيات نقطة ب

تعلم

معادلة الكرة فى الفراغ
equation of sphere

تُعَّرف الكرة بأنها مجموعة نقط الفراغ التي تبعد عن نقطة ثابتة (تعرف بمركز الكرة) بُعدًا ثابتًا (يسمى بطول نصف قطر الكرة).



فإذا كانت النقطة (س، ص، ع) تقع على الكرة التي مركزها النقطة (ل، ك، ن) وطول نصف قطرها نق فإنه طبقًا لقانون البعد بين نقطتين

يكون $\sqrt{(س - ل)^٢ + (ص - ك)^٢ + (ع - ن)^٢}$ = نق

وبتربيع الطرفين نحصل على الصورة القياسية لمعادلة الكرة $(س - ل)^٢ + (ص - ك)^٢ + (ع - ن)^٢ = نق^٢$

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

فى بند حاول أن تحل الموضح ص١٢٣:

- ساعد الطلاب فى الوصول إلى الإجابة الصحيحة من خلال فتح باب المناقشة والحوار عن الشرط الواجب توافره ليكون المثلث متساوى الأضلاع وكيفية توظيف ما تم تعلمه فى هذا الدرس للوصول إلى هذا المطلوب.
- يمكن أن تقسم الطلاب إلى مجموعات بحيث تقوم المجموعات بالحل وعمل نوع من المنافسة الإيجابية بين المجموعات حول الأسرع فى الوصول للإجابة الصحيحة كما يمكن تدريبهم على رسم هذا المثلث فى الاحداثى ثلاثى الابعاد

احداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة

- استمرارًا فى الاستفاده من الخبرات السابقة لدى الطلاب اطلب من أحدهم كتابة العلاقة التى توضح كيفية تحديد احداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة فى مستوى.
- ومن خلال ما تم التعرف عليه فى المناقشات المرتبطة بكيفية حساب البعد بين نقطتين يمكن لطلابك توقع العلاقة التى توضح كيفية إيجاد إحداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة فى الفراغ والموضحة بالعلاقة التالية حيث

جـ هى منتصف القطعة أ ب

$$جـ\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢}، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}، \frac{ع_١ + ع_٢}{٢}\right)$$

- وأكد على ما تم مناقشته من خلال حل المثال الموضح.

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

٤.فى بند حاول أن تحل ص١٢٣

- ساعد طلابك على الوصول الإجابة الصحيحة :

فى بند تعلم (معادلة الكره فى الفراغ)

- اطلب من الطلاب تعريف الدائره وناقش معهم العلاقة بين الدائرة والكره من حيث اوجه الشبه والاختلاف

- وضح للطلاب أن الكرة هى مجموعة من نقط الفراغ تبعد عن نقطة ثابتة (تعرف بمركز الكرة) بعدًا ثابتًا (يسمى بطول نصف قطر الكرة)، وأكد على أنه يشبه إلى حد كبير تعريف الدائرة والاختلاف أن تلك النقاط فى الفراغ ولها ثلاثة احداثيات.

- افترض احداثيات لمركز الكرة واحداثيات اخرى لأحد النقاط التى تقع على سطح الكرة وباستخدام ما تم تعلمه عن طول قطعة مستقيمة واصلة بين نقطتين فى الفراغ اطلب منهم تسجيل العلاقة التى توضح طول نصف قطر الدائرة ثم اطلب منهم مقارنه ما توصلوا إليه مع ما هو مدون فى الكتاب ص١٢٣، ثم انتقل إلى مفهوم الصورة القياسية لمعادلة الكرة والتى يتم الحصول عليها من تربيع طرفى العلاقة التالية

نق = $\sqrt{\text{(س - ل)}^{٢} + \text{(ص - ك)}^{٢} + \text{(ع - ن)}^{٢}}$

وبالتالى

نق^{٢} = (س - ل)^{٢} + (ص - ك)^{٢} + (ع - ن)^{٢}

- وللتدريب على إيجاد الصورة القياسية لمعادلة الكرة ساعدهم فى استيعاب المثال الموضح ص١٢٤ حيث يمكن بالتعويض المباشر عن احداثيات النقطة وطول نصف القطر الحصول على المعادلة المطلوبة.

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

٥.فى بند حاول أن تحل الموضح ص١١٦:

- ساعد طلابك فى إيجاد الصورة الصحيحة القياسية لمعادلة الكرة وفق المعطيات المتاحة وناقش مع الطلاب فى التمرين وساعدهم فى التمييز بين نقطة الأصل بأعتبار نقطة تقع على محيط الكرة وبين مركزها.

نق^{٢} = (-١ -٣)^{٢} + (٤+٢)^{٢} + (٢-٦)^{٢} = ٦٨

نق^{٢} = ٨٨

م = $\left(\frac{\text{-١ + ٣}}{\text{٢}} ، \frac{\text{٤ - ٢}}{\text{٢}} ، \frac{\text{٢ + ٦}}{\text{٢}}\right)$

م = (١ ، ١ ، ٤)

معادلة الكرة هي :

(س -١)٢ + (ص -١)^{٢} = (ع - ٤)^{٢} = ١٧

الوحدة الأولى: الهندسة والقياس فى بعدين وثلاثة أبعاد

مثال

٤ أوجد الصورة القياسية لمعادلة الكرة التي مركزها النقطة (٢، -١، ٤) وطول نصف قطرها ٣ وحدات.

الحل

معادلة الكرة (س - ٢)^{٢} + (ص + ١)^{٢} + (ع - ٤)^{٢} = ٩

حاول أن تحل

٥ أوجد معادلة الكرة التي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٥ وحدات.

مثال

٥ أوجد معادلة الكرة التي أ(-١، ٥ ،٤) ، ب(٥، ١، -٢) هما طرفى قطر فيها.

الحل

مركز الكرة هو نقطة منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ أي $\left(\frac{\text{-١+٥}}{\text{٢}} ، \frac{\text{٥ + ١}}{\text{٢}} ، \frac{\text{٤ - ٢}}{\text{٢}}\right)$ = (٢، ٣ ، ١)

طول نصف قطر الكرة يساوي البعد بين المركز ونقطة أ

∴ نق = $\sqrt{\text{(٢ + ١)}^{٢} + \text{(٣ - ٥)}^{٢} + \text{(١ - ٤)}^{٢}}$ = $\sqrt{\text{٢٢}}$

∴ معادلة الكرة هى: (س - ٢)^{٢} + (ص - ٣)^{٢} + (ع - ١)^{٢} = ٢٢

حاول أن تحل

٦ أوجد معادلة الكرة التى $\overline{\text{أ ب}}$ قطر فيها حيث أ (-١، ٤ ، ٢)، ب (٣، -٢، ٦)

مثال

٦ عَيِّن مركز وطول نصف قطر الكرة التى معادلتها س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ٤س -٢ص -٦ع + ١١= ٠

الحل

للحصول على الصورة القياسية للكرة نستخدم إكمال المربع كما يلي:

(س^{٢} + ٤س+ ...) + (ص^{٢} + ٢ص + ...) + (ع^{٢} - ٦ع+ ...) = -١١

بإضافة ٤ + ١ + ٩ للطرفين (مربع نصف معامل س، مربع نصف معامل ص، ...)

∴ (س^{٢} + ٤س + ٤) + (ص^{٢} + ٢ص + ١) + (ع^{٢} - ٦ع + ٩) = ٤ + ١ + ٩ - ١١

∴ (س + ٢)^{٢} + (ص + ١)^{٢} + (ع - ٣)^{٢} = ٣

والصورة الأخيرة تمثل معادلة الكرة التي مركزها النقطة (-٢، -١، ٣) وطول نصف قطرها $\sqrt{\text{٣}}$ وحدة طول

١١٦ الصف الثالث الثانوى - كتاب الطالب

- وفى حالة وجود صعوبة لدى بعض الطلاب، اطلب إليهم مزيد من التدريب من خلال مراجعة خطوات حل المثال الموضح ص١١٦ مع توضح أن المثال الموضح يحتاج إلى إيجاد إحداثيات مركز الكرة وطول نصف القطر للكره.

حاول أن تحل

٧ عين مركز وطول نصف قطر الكرة التى معادلتها $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ٦س - ٨ص + ٤ع + ١ = ٠$

تمارين (١ - ١)

أكمل ما يأتي:

١ إذا كانت النقطة (س، ص، ع) تقع فى المستوى الإحداثى س ص فإن ع = ...

٢ المستقيمان $\overleftrightarrow{س س'}$ ، $\overleftrightarrow{ع ع'}$ يكونان المستوى الإحداثى .... الذي معادلته ....

٣ الشكل المقابل يمثل متوازي مستطيلات فى نظام إحداثي متعامد.
أحد رؤوسه ينطبق على نقطة الأصل و(٠، ٠، ٠)
فإن إحداثيات النقطة ب هى ....
و إحداثيات النقطة جـ هى ....

٤ إذا كانت أ (١، -١، ٤) ، ب (٠، -٣، ٢) فإن إحداثيات نقطة منتصف $\overline{أ ب}$ هى ....

٥ معادلة الكرة التي مركزها النقطة (٢، -١، ٤) وطول نصف قطرها ٥ وحدات هى ....

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

٦ بُعد النقطة (٣، -١، ٢) عن المستوى الإحداثى س ع يساوي .... وحدة طول
أ ٣　ب -١　جـ ٢　د ١

٧ طول العمود المرسوم من النقطة (-٢، ٣، ٤) على محور س يساوي .... وحدة طول.
أ ٢　ب ٣　جـ ٥　د ٤

٨ إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة التي طرفاها (-٣، ٢، ٤) (٥، ١، ٨) هى
أ $(١، \frac{٣}{٢}، ٦)$　ب (٢، -١، ٤)　جـ (٨، -١، ٤)　د $(١، -\frac{٣}{٢}، ٢)$

٩ معادلة الكرة التي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٥ وحدات هى
أ $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ٥$　ب $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ٠$
جـ $(س - ٥)^٢ + (ص - ٥)^٢ + (ع - ٥)^٢ = ٢٥$　د $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ٢٥$

١٠ معادلة الكرة التي مركزها النقطة (٢، -٣، ٤) وتمس المستوى الإحداثى س ص هى
أ $(س - ٢)^٢ + (ص + ٣)^٢ + (ع - ٤)^٢ = ٤$　ب $(س - ٢)^٢ + (ص + ٣)^٢ + (ع - ٤)^٢ = ٩$
جـ $(س - ٢)^٢ + (ص + ٣)^٢ + (ع - ٤)^٢ = ١٦$　د $(س + ٢)^٢ + (ص - ٣)^٢ + (ع + ٤)^٢ = ١٦$

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

٦. فى بند حاول أن تحل ص١١٦ :

- ساعد الطلاب على الوصول إلى الإجابة الصحيحة موضحًا لهم ضرورة إيجاد مركز الكرة وبالتالى إيجاد طول نصف قطر الكرة حتى يمكن إيجاد الصورة القياسية لمعادلة الكرة.
- الفت انتباه الطلاب إلى أن هذا التمرين يمثل تجميع للعلاقات التى تم تعلمها فى الدرس وبالتالى على الطلاب ملاحظة أنه لم يطلب منهم بشكل مباشر إيجاد احداثيات نقطة أو طول قطعة مستقيمة واصلة بين نقطتين.

٧. فى بند حاول أن تحل ص١١٧

- ساعد الطلاب فى ملاحظة اختلاف المطلوب حيث تم الحصول على معادلة الكرة كمعطى والمطلوب هو إيجاد طول نصف القطر وهذا يتطلب استخدام الطلاب بمهاراتهم فى المفاهيم والعلاقات التى سبق دراستها فى فرع الجبر و إكمال المربع للوصول إلى الحل.

بعض إجابات تمارين الدرس الأول من ص١١٧ إلى ١١٩

١ ع = صفر　　٢ س ع ، ص = ٠

٣ ب (٦، ٤، ٠) ، جـ (٦، ٠، ٢)

٤ بفرض أن جـ منتصف $\overline{أ ب}$

∴ جـ $\left(\frac{١ + ٠}{٢} ، \frac{-١ - ٣}{٢} ، \frac{٤ - ٢}{٢}\right) = \left(\frac{١}{٢} ، -٢ ، ١\right)$

٥ معادلة الكرة هى

$(س - ٢)^٢ + (ص + ١)^٢ + (ع - ٤)^٢ = ٢٥$

٦ د　　٧ أ

٨ أ　　١٠ د

١١

أ البعد = $\sqrt{(٧ - ١)^٢ + (٠ - ٠)^٢ + (٤ + ٠)^٢}$

= $\sqrt{٦٥}$ وحدة طولية

ب البعد = $\sqrt{(٤ - ٢)^٢ + (١ - ١)^٢ + (٩ + ٦)^٢}$

= $\sqrt{١٣}$ وحدة طولية

جـ البعد = $\sqrt{(١ + ٢)^٢ + (١ + ٣)^٢ + (-٧ + ٧)^٢}$

= $\sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدة طولية.

(١٢) بفرض أن أ (-٢، ٥، ٢) ، ب (٠، ٠، ٢) ، جـ (٠، ٤، ٠)

∴ أب = $\sqrt{(-٢ - ٠)^{٢} + (٥ - ٠)^{٢} + (٢ - ٢)^{٢}}$ = $\sqrt{٢٩}$ (١)

أجـ = $\sqrt{(-٢ - ٠)^{٢} + (٥ - ٤)^{٢} + (٢ + ٠)^{٢}}$ = $\sqrt{٩}$ = ٣ (٢)

ب جـ = $\sqrt{(٠ - ٠)^{٢} + (٠ + ٤)^{٢} + (٢ + ٠)^{٢}}$ = $\sqrt{٢٠}$ (٣)

من ١ ، ٢ ، ٣ نجد أن

(أ ب)^{٢} = (أ جـ)^{٢} + (ب جـ)^{٢}

∴ △ قائم الزاوية فى جـ

مساحة سطحه = $\frac{١}{٢}$ × ٣ × $\sqrt{٢٠}$ = ٣ $\sqrt{٥}$ وحدة مربعة

(١٣) طول ضلع المكعب = $\sqrt[٣]{٢٧}$ = ٣ وحدات طولية

∴ أ (٠، ٣، ٣) ، ب (٠، ٣، ٠) ، جـ(٣، ٣، ٠) ، د(٣، ٣، ٣)

هـ (٠، ٠، ٣) ، و (٠، ٠، ٠) ، ل(٣، ٠، ٠) ن(٣، ٠، ٣)

(١٤) بفرض أن أ (٣،١،٧)، ب (٣،٥،ك)، جـ (٣،٥،٣)

أولًا

∴ أ ب = $\sqrt{(٧ - ٥)^{٢} + (١ - ٣)^{٢} + (٣ - ك)^{٢}}$

= $\sqrt{٨ + (٣ - ك)^{٢}}$ (١)

ب جـ = $\sqrt{(٥ - ٣)^{٢} + (٣ - ٥)^{٢} + (٥ - ٣)^{٢}}$

= $\sqrt{٨ + (٣ - ك)^{٢}}$ (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن أ ب = ب جـ لجميع قيم ك ∈ ح

ثانيًا:

أ جـ = $\sqrt{(٧ - ٣)^{٢} + (١ - ٥)^{٢} + (٣ - ٣)^{٢}}$ = $\sqrt{٣٢}$

لكى يكون متساوى الأضلاع يجب أن يكون

٨ + (٣ - ك)^{٢} = ٣٢

(٣ - ك)^{٢} = ٢٤ ← (ك - ٣)^{٢} = ٢٤

∴ ك = ± $\sqrt{٢٤}$ + ٣ = ± ٢ $\sqrt{٦}$ + ٣

الوحدة الأولى: الهندسة والقياس فى بعدين وثلاثة أبعاد

أجب عن الأسئلة الآتية:

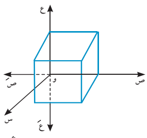
(١١) أوجد البعد بين النقطتين أ ب فى كل مما يأتي:

أ) أ (٧ ، ٠ ، ٤) ، ب (١ ، ٠ ، ٠)
ب) أ (٤، ١، ٩) ، ب (٢ ، ١ ، ٦)
جـ) أ (١ ، ١ ، -٧) ، ب (-٢ ، -٣ ، -٧)

(١٢) أثبت أن المثلث الذى رؤوسه النقط الآتية هو مثلث قائم الزاوية، وأوجد مساحته:

أ) (-٢ ، ٥ ، ٢)، (٠ ، ٠ ، ٢)، (٠ ، ٤ ، ٠)
ب) (-٤ ، ٤ ، ١)، (٢ ، -١ ، ٢)، (-٢ ، ٥ ، ٠)

(١٣) الشكل المقابل يمثل مكعبًا حجمه ٢٧ وحدة مكعبة
أحد رؤوسه ينطبق على نقطة الأصل
أوجد إحداثيات باقي الرؤوس .



(١٤) أثبت أن النقط (٧، ١، ٣) ، (٥، ٣، ك)، (٣، ٥، ٣) تكون مثلثًا متساوى الساقين لجميع قيم ك الحقيقية، ثم أوجد قيمة (قيم) ك التي تجعل المثلث متساوي الأضلاع.

(١٥) أوجد إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة $\overline{\text{أ ب}}$ فى كل مما يأتي:

أ) أ(٣، -١، ٤) ، ب (٢، ٠، -١)
ب) أ(-٣، ٥، ٥) ، ب (-٦، ٤، ٨)

(١٦) إذا كانت جـ (-١، ٤، ٠) منتصف القطعة المستقيمة $\overline{\text{أ ب}}$ حيث ب (٤، -٢، ١) أوجد إحداثيات النقطة أ.

(١٧) أوجد معادلة الكرة إذا كان:

أ) مركزها النقطة (٣، -١، ٢) وطول نصف قطرها $\sqrt{٧}$
ب) (٣، ٤، -٣)، (٠، ٢، ١) نهائيًّا قطر فيها.
جـ) مركزها النقطة (١، -٦، ١) وتمر بالنقطة (٢، -١، ٥)

(١٨) أوجد مركز وطول نصف قطر الكرة فى كل مما يأتى:

أ) س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} = ٩
ب) س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} - ٢س + ٤ص = ٠
جـ) ٢س^{٢} + ٢ص^{٢} + ٢ع^{٢} - ٢س - ٦ص - ٤ع + ٥ = ٠

(١٩) أوجد معادلة الكرة التي طول نصف قطرها ٣ وحدات، وتمس مستويات الإحداثيات الموجبة.

(٢٠) تفكير إبداعي:

إذا كانت أ ∈ محور س، ب ∈ محور ص، جـ ∈ محور ع وكانت النقطة (١، -١، صفر) منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، والنقطة (٠، -١، ٢) منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$. أوجد إحداثيات منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$

١١٨ الصف الثالث الثانوى – كتاب الطالب

(٢١) **تفكير إبداعي:** إذا قطع محور السينات الكرة (س - ٢)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} + (ع - ١)^{٢} = ٤ فى النقطتين أ، ب، أوجد طول $\overline{\text{أب}}$

(٢٢) **الكتابة فى الرياضيات:** إذا كانت جميع النقط فى الفراغ التي على الصورة (س، ص، ٠) تقع فى المستوى الديكاري س ص ومعادلته ع = ٠، فأوجد معادلة المستوى الذي تقع فيه جميع النقط فى الفراغ الذى على الصورة (س، ص، ٢)

(٢٣) **اكتشف الخطأ:** إذا كانت النقطة ب (-١، ٤، ٢) منتصف القطعة المستقيمة $\overline{\text{أجـ}}$ حيث أ(١ ، ٠ ، ٢) أوجد إحداثيات النقطة جـ

حل أشرف	حل زياد
جـ = $\left(\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢}\right)، \left(\frac{ص_١ + س_٢}{٢}\right)، \left(\frac{ع_١ + ع_٢}{٢}\right)\right)$ = $\left(\left(\frac{-١ + ١}{٢}\right)، \left(\frac{٤ + ٠}{٢}\right)، \left(\frac{٢ + ٢}{٢}\right)\right)$ = (٠، ٢، ٢)	نفرض جـ (س، ص، ع) ∴ $\frac{١ + س}{٢}$ = -١ ⟵ س = -٣ $\frac{٠ + ص}{٢}$ = ٤ ⟵ ص = ٨ $\frac{٢ + ع}{٢}$ = ٢ ⟵ ع = ٢ ∴ جـ (-٣، ٨، ٢)

أي الحلين صوابًا؟ ولماذا؟

(١٥)

أ) $\left(\frac{٣ + ٢}{٢}، \frac{-١ + ٠}{٢}، \frac{٤ + (-١)}{٢}\right) = \left(\frac{٥}{٢}، \frac{-١}{٢}، \frac{٣}{٢}\right)$

ب) $\left(\frac{-٩}{٢}، \frac{٩}{٢}، \frac{١٣}{٢}\right)$

(١٦) بفرض أن أ(س، ص، ع)

∴ $\left(\frac{س + ٤}{٢}، \frac{ص - ٢}{٢}، \frac{ع + ١}{٢}\right)$ = (-١، ٤، ٠)

∴ س = -٦ ، ص = ١٠ ، ع = -١

∴ أ(-٦، ١٠، -١)

(١٧)

أ) (س - ٣)^{٢} + (ص + ١)^{٢} + (ع - ٢)^{٢} = ٧

ب) المركز م $\left(\frac{٣}{٢}، ٣، -١\right)$ ، نق^{٢} = $\frac{٢٩}{٤}$

∴ معادلة الدائرة هى $\left(س - \frac{٣}{٢}\right)^{٢}$ + (ص - ٣)^{٢} + (ع + ١)^{٢} = $\frac{٢٩}{٤}$

جـ) نق^{٢} = ٤٢

معادلة الدائرة هى: (س - ١)^{٢} + (ص + ٦)^{٢} + (ع - ١)^{٢} = ٤٢

(١٨)

أ) المركز (٠ ، ٠ ، ٠) ، نق = ٣

ب) ∵ س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} - ٢س + ٤ص = ٠

∴ (س^{٢} - ٢س + ١) + (ص^{٢} + ٤ص + ٤) + ع^{٢} = ٥

∴ (س - ١)^{٢} + (ص - (-٢))^{٢} + (ع - ٠)^{٢} = ٥

∴ المركز (١، -٢، ٠) ، نق = $\sqrt{٥}$

جـ) ∵ ٢س^{٢} + ٤ص^{٢} + ٢ع^{٢} - ٢س - ٦ص - ٤ع + ٥ = ٠

∴ (س^{٢} - س + $\frac{١}{٤}$) + (ص^{٢} - ٣ص + $\frac{٩}{٤}$) + (ع^{٢} - ٢ع + ١)

= $\frac{-٥}{٢}$ + $\frac{١}{٤}$ + $\frac{٩}{٤}$ + ١

∴ $\left(س - \frac{١}{٢}\right)^{٢}$ + $\left(ص - \frac{٣}{٢}\right)^{٢}$ + (ع - ١)^{٢} = ١

∴ المركز $\left(\frac{١}{٢}، \frac{٣}{٢}، ١\right)$ ، نق = ١

(١٩) ∵ الكرة تمس مستويات الاحداثيات الموجبة

∴ المركز (٣، ٣، ٣)

∴ المعادلة: (س - ٣)^{٢} + (ص - ٣)^{٢} + (ع - ٣)^{٢} = ٩

الوحدة الأولى

١ - ٢ المتجهات فى الفراغ

Vectors in space

خلفية:

سبق ودرس الطالب الكميات القياسية والكميات المتجهه فى المستوى، ولدى الطلاب خبره سابقة عن مفهوم الكميات المتجهه بشكل عام والقطعة المستقيمة الموجهة وكيفية تحديدها مقدارًا واتجاهًا ولذا فلابد من الاستفادة من هذه الخبرة فى استيعاب مفهوم المتجهات فى الفراغ.

مخرجات التعلم:

فى نهاية هذا الدرس وتنفيذ الأنشطة مبنية من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يمثل متجه بثلاث مرتب.
- يحدد متجه الموضع فى الفراغ.
- يتعرف متجهات الوحدة الأساسية فى الفراغ.
- يعبر عن متجه بدلالة متجهات الوحدة الأساسية.
- يعبر عن القطعة المستقيمة الموجهة فى الفراغ بدلالة إحداثيات طرفيها.
- يتعرف شرط تساوى متهجهين فى الفراغ.
- يوجد معيار متجه ومتجه الوحدة له فى اتجاه معين فى الفراغ.
- يتمكن من إيجاد حاصل جمع متجهين فى الفراغ.
- يوجد حاصل ضرب المتجهات فى عدد حقيقى.

مفردات أساسية:

متجه الموضع - متجه الوحدة - المتجه الاساسى - معيار المتجه - مركبة المتجه - زوايا الاتجاه.

المواد التعليمية المستخدمة:

سبورة تعليمية - سبورة مربعات - طباشير ملون.

طرق التدريس المقترحة:

العرض المباشر - المناقشة - التعلم التعاونى - حل المشكلات.

الوحدة الأولى

١ - ٢ المتجهات فى الفراغ

Vectors in space

سوف تتعلم

- تمثيل المتجه بثلاث رتب.
- متجه الموضع فى الفراغ.
- متجهات الوحدة الأساسية فى الفراغ.
- التعبير عن متجه بدلالة متجهات الوحدة الأساسية.
- التعبير عن القطعة المستقيمة الموجهة فى الفراغ بدلالة إحداثيات طرفيها.
- تساوي متجهين فى الفراغ.
- معيار المتجه فى الفراغ.
- متجه الوحدة فى اتجاه متجه فى الفراغ.
- جمع المتجهات فى الفراغ.
- ضرب المتجهات فى عدد حقيقي.

مصطلحات أساسية

- متجه الوضع فى الفراغ *Position vector in space*
- معيار المتجه *the norm vector*
- متجه الوحدة *Unit vector*
- الضرب القياسى *Scalar product*
- الضرب الاتجاهى *Vector product*

مقدمة:

درست سابقًا الكميات القياسية والكميات المتجهة، وعلمت أن المتجه يُمثَّل بقطعة مستقيمة موجهة تحدد بمقدار (معيار المتجه)، واتجاه، وفي هذا الدرس نتناول المتجهات فى الفراغ، وهو (نظام إحداثي ذو ثلاثة أبعاد).

تعلم

متجه الموضع فى الفراغ *position vector in space*

يعرف متجه الموضع للنقطة أ ($أ_س$، $أ_ص$، $أ_ع$) بالنسبة لنقطة الأصل و (٠، ٠، ٠) على أنه القطعة المستقيمة الموجهة التي بدايتها نقطة الأصل ونهايتها النقطة أ.

- و يرمز لمتجه موضع النقطة أ بالرمز $\overrightarrow{أ}$ أي أن $\overrightarrow{أ}$ = ($أ_س$، $أ_ص$، $أ_ع$)
- $أ_س$ تسمى مركبة المتجه $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه محور س.
- $أ_ص$ تسمى مركبة المتجه $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه محور ص.
- $أ_ع$ تسمى مركبة المتجه $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه محور ع.

معيار المتجه *the norm of vector*

هو طول القطعة المستقيمة الموجهة التي تمثل المتجه.

فإذا كان $\overrightarrow{أ}$ = ($أ_س$، $أ_ص$، $أ_ع$) فإن من قانون البعد بين نقطتين يكون

$$\|\overrightarrow{أ}\| = \sqrt{(أ_س)^٢ + (أ_ص)^٢ + (أ_ع)^٢}$$

مثال

١ إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (٢، -١، ٣)، $\overrightarrow{ب}$ = (٠، ٤، -٣) فإن

- مركبة المتجه $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه محور س هى ٢
- مركبة المتجه $\overrightarrow{ب}$ فى اتجاه محور ع هى -٣

$$\|\overrightarrow{أ}\| = \sqrt{٢^٢ + (-١)^٢ + (٣)^٢} = \sqrt{١٤}$$

$$\|\overrightarrow{ب}\| = \sqrt{(٠)^٢ + (٤)^٢ + (-٣)^٢} = ٥$$

المتجه $\overrightarrow{ب}$ يقع فى المستوى الإحداثى ص ع (تنعدم مركبة $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه محور س

١٢٠ الصف الثالث الثانوى - كتاب الطالب

مكان التدريس:

الفصل الدراسى - غرفة الحاسب الآلى (الوسائل المتعددة)

مصادر التعلم:

كتاب الطالب من ص١٢٨ إلى ص١٣٦.

تهيئة:

ناقش مع الطلاب الفرق بين الكمية القياسية والكمية الموجهة وكيفية تحديد كل منهما وأكد على ضرورة تحديد المعيار الاتجاه بالنسبة للكميات الموجهة مع الاثاره إلى الاختلاف بين إحداثيات تتطرق فى مستوى واحداثياتها فى نظام ثلاثى الابعاد.

حاول أن تحل

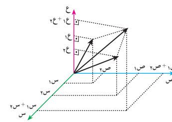
(١) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (-١، ٤، ٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٣، ١، ٠) أوجد

(أ) $أ_س + ب_ص$ (ب) $\|\overrightarrow{أ}\| + \|\overrightarrow{ب}\|$

جمع المتجهات فى الفراغ *Addition for 3 D vectors*

إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = ($أ_س$، $أ_ص$، $أ_ع$)، $\overrightarrow{ب}$ ($ب_س$، $ب_ص$، $ب_ع$) فإن:

$\overrightarrow{جـ}$ = $\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$ = ($أ_س + ب_س$، $أ_ص + ب_ص$، $أ_ع + ب_ع$) = ($جـ_س$، $جـ_ص$، $جـ_ع$)



مثال

(٢) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (-٢، ٣، ١)، $\overrightarrow{ب}$ = (٠، -٢، ٤)، فإن:

$\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}$ = (-٢، ٣، ١) + (٠، -٢، ٤) = (-٢+٠، ٣+ (-٢)، ١+ ٤) = (-٢، ١، ٥)

حاول أن تحل

(٢) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (٤، -٤، ٠) ، $\overrightarrow{ب}$ = (-١، ٥، ٢) أوجد $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}$

خواص عملية جمع المتجهات فى الفراغ

لأي متجهين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ∈ $ح^٣$ فإن:

١- خاصية الانغلاق: $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}$ ∈ $ح^٣$

٢- خاصية الإبدال: $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{ب} ، \overrightarrow{أ}$

٣- خاصية التجميع: ($\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}$) + $\overrightarrow{جـ}$ = $\overrightarrow{أ}$ + ($\overrightarrow{ب} + \overrightarrow{جـ}$)

٤- العنصر المحايد الجمعي المتجه الصفري: $\overrightarrow{و}$ = (٠، ٠، ٠) هو العنصر المحايد الجمعي فى $ح^٣$

أي أن: $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{و} = \overrightarrow{و} + \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{أ}$

٥- المعكوس الجمعى: لكل متجه $\overrightarrow{أ}$ = ($أ_س$، $أ_ص$، $أ_ع$) ∈ $ح^٣$ يوجد

-$\overrightarrow{أ}$ = (-$أ_س$، -$أ_ص$، -$أ_ع$) ∈ $ح^٣$ بحيث: $\overrightarrow{أ}$ + (-$\overrightarrow{أ}$) = (-$\overrightarrow{أ}$) + $\overrightarrow{أ}$ = $\overrightarrow{و}$

ضرب المتجه فى عدد حقيقى *Multiplying avector by ascalar*

إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = ($أ_س$، $أ_ص$، $أ_ع$) ∈ $ح^٣$ وكان ك ∈ ح فإن:

ك $\overrightarrow{أ}$ = ك ($أ_س$، $أ_ص$، $أ_ع$) = (ك $أ_س$، ك$أ_ص$، ك$أ_ع$) ∈ $ح^٣$

كتاب الجبر والهندسة الفراغية - الهندسة الفراغية ١٢١

إجراءات الدرس:

- فى بند تعلم ذكر الطلاب بأن إحداثيات نقطه فى الفراغ يعبر عنها بثلاث الرتب (س، ص، ع) ، وذكر الطلاب بمفهوم متجه الموضع لنقطة فى المستوى ووضح للطلاب ان متجه موضع نقطة بالنسبة لنقطة الأصل فى الفراغ يعبر عنها كما يلي:
  $\overrightarrow{أ}$ = ($أ_س$، $أ_ص$، $أ_ع$)
- وساعدهم فى استيعاب اسم كل إحداثي من تلك الاحداثيات وتحديد اتجاهه.

معيار المتجه

- وضح للطلاب المفهوم الرياضى لمفردة معيار، واستخدم قانون البعد بين نقطتين لإيجاد معيار متجه موضع أى نقطة مع التأكيد على أن متجه الموضع هو النقطة المستقيمة الواصله بين نقطة الأصل (٠، ٠، ٠) وتلك النقطة ($أ_س$، $أ_ص$ ، $أ_ع$)
- ومن خلال التطبيق المباشر للعلاقة التى توضح قيمة معيار قيمة باستخدام المثال الموضح ص١٢٨ يمكن التدريب على إيجاد معيار متجه.

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

١.فى بند حاول أن تحل ص١٢١

- ساعد الطلاب على إيجاد المركبة لكل متجه فى الاتجاه المحدد وساعدهم فى الوصول إلى الإجابات الصحيحة.

جمع المتجهات فى الفراغ

- وضح للطلاب مفهوم وكيفية إيجاد ناتج جمع متجهين فى الفراغ وفى حالة وجود صعوبة لدى بعض الطلاب ذكرهم بطرق جمع متجهين (المثلث متوازى الأضلاع) ، مع التأكيد على أهمية مراعاة ترتيب إحداثيات كل متجه فى حالة إيجاد متجه المجموع.

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

٢.بند حاول أن تحل ص١٢١

- ساعد الطلاب على إيجاد قيمة مجموع متجهين للوصول إلى الإجابة الصحيحة

(أ) $أ_س + ب_ص$ = صفر

(ب) $\|\overrightarrow{أ}\| = \sqrt{١+١٦+٤} = \sqrt{٢١}$

$\|\overrightarrow{ب}\| = \sqrt{٩+١} = \sqrt{١٠}$

$\|\overrightarrow{أ}\| = \sqrt{٢١} = \sqrt{١٠}$

خواص عملية جمع المتجهات فى الفراغ

- من خلال النتائج التى تم التوصل إليها فى المثال اخر التمرين الموضح فى بند حاول أن تحل ، استعرض مع الطلاب خواص عملية جمع المتجهات فى الفراغ والموضحة فى ص١٢١ وهى (الانغلاق - الابدال - الدمج التجميع - العنصر المحايد الجمعى - المعكوس الجمعى) فضلًا عن امكانية ضرب متجه فى عدد حقيقى وذلك باستخدام امثلة متنوعة لتوضيح تلك الخواص.
- اطلب من طلابك محاولة تطبيق تلك الخواص من خلال حل المثال الموضح ص١٣٠ مع تقديم المساعدة اللازمة لهم عند الضرورة.

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

٣. فى بند حاول أن تحل ص١٢٢

- الفت انتباه الطلاب إلى إمكانية استخدام خواص عملية جمع المتجهات فى الفراغ لإيجاد المطلوب. موضحًا أن (أ) يطلب فيها تطبيق خاصية ضرب متجه فى عدد حقيقى ثم إيجاد (مجموع أو الفرق بين متجهين)
- مع توضيح أن طرح متجهين عبارة عن جمع المتجه الأول مع المعكوس الجمعى للمتجه الثانى $\overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{أ}} + (-\overrightarrow{\text{ب}})$ وفى (ب) ساعدهم على استخدام وتوظيف معارفهم السابقة فى حل المعادلات لإيجاد متجه معين.

حاول أن تحل (٣)

أ) ٥ $\overrightarrow{\text{جـ}}$ - ٢ $\overrightarrow{\text{ى}}$ = (١٠، -١٥، ٥) - (٠، ٤، -٤)

٥ $\overrightarrow{\text{جـ}}$ -٢ $\overrightarrow{\text{ى}}$ = (١٠، -١٩، ٩)

ب) ٣ $\overrightarrow{\text{أ}}$ = $\overrightarrow{\text{جـ}}$ - ٤ $\overrightarrow{\text{ى}}$

٣ $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٢، -٣، ١) + (٠، ٨، -٨)

٣ $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٢، ٥، -٧)

$\overrightarrow{\text{أ}}$ = ($\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٥}{٣}$ ، $\frac{-٧}{٣}$)

الوحدة الأولى: الهندسة والقياس فى بعدين وثلاثة أبعاد

فمثلًا: ٣ (٢، -١، ٤) = (٦، -٣، ١٢)

$\frac{١}{٢}$ (٤، ٩، ٦) = (٢، $\frac{٩}{٢}$، ٣)

-٢ (١، -٣، -٤) = (-٢، ٦، ٨)

خواص ضرب المتجهات فى عدد حقيقى

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ∈ $ح^٣$ وكان ك، ل ∈ ح فإن

١- خاصية التوزيع

- ك ($\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب}}$) = ك $\overrightarrow{\text{أ}}$ + ك $\overrightarrow{\text{ب}}$
- (ك + ل) $\overrightarrow{\text{أ}}$ = ك $\overrightarrow{\text{أ}}$ + ل $\overrightarrow{\text{أ}}$

٢- خاصية الدمج

- ك (ل $\overrightarrow{\text{أ}}$) = ل (ك $\overrightarrow{\text{أ}}$) = (ك ل) $\overrightarrow{\text{أ}}$

مثال

(٣) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (-١، ٥، ٢) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٤، -١، ٣) فإن

١- ٢ $\overrightarrow{\text{أ}}$ - ٣ $\overrightarrow{\text{ب}}$ = ٢(-١، ٥، ٢) -٣ (٤، -١، ٣)

= (-٢، ١٠، ٤) + (-١٢، ٣، -٩)

= (-١٤، ١٣، -٥)

٢- أوجد المتجه $\overrightarrow{\text{جـ}}$ حيث ٢ $\overrightarrow{\text{جـ}}$ + ٣ $\overrightarrow{\text{أ}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{ب}}$

∵ ٢ $\overrightarrow{\text{جـ}}$ + ٣ $\overrightarrow{\text{أ}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{ب}}$ — بإضافة -٣ $\overrightarrow{\text{أ}}$ للطرافين

∴ ٢ $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{ب}}$ - ٣ $\overrightarrow{\text{أ}}$

∴ ٢ $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = ٢ (٤، -١، ٣) -٣ (-١، ٥، ٢)

= (٨، -٢، ٦) + (٣، -١٥، -٦)

= (١١، -١٧، ٠) — بالضرب فى $\frac{١}{٢}$

∴ $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = $\frac{١}{٢}$ (١١، -١٧، ٠) = ($\frac{١١}{٢}$ ، $\frac{-١٧}{٢}$، ٠)

حاول أن تحل

(٣) إذا كان $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = (٢، -٣، ١)، $\overrightarrow{\text{ى}}$ = (٠، ٢، -٢)

أ) أوجد ٥ $\overrightarrow{\text{جـ}}$ - ٢ $\overrightarrow{\text{ى}}$

ب) إذا كان ٣ $\overrightarrow{\text{أ}}$ - ٤ $\overrightarrow{\text{ى}}$ = $\overrightarrow{\text{جـ}}$ فأوجد $\overrightarrow{\text{أ}}$

١٢٢ الصف الثالث الثانوى - كتاب الطالب

تساوى المتجهات فى الفراغ

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_{\text{س}}، \text{أ}_{\text{ص}}، \text{أ}_{\text{ع}})$، $\overrightarrow{\text{ب}} = (\text{ب}_{\text{س}}، \text{ب}_{\text{ص}}، \text{ب}_{\text{ع}})$ فإن:

$\overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{\text{ب}}$ **إذا و فقط إذا كان:** $\text{أ}_{\text{س}} = \text{ب}_{\text{س}}$، $\text{أ}_{\text{ص}} = \text{ب}_{\text{ص}}$، $\text{أ}_{\text{ع}} = \text{ب}_{\text{ع}}$

مثال

٤) أوجد قيمة ل ، م، ن التى تجعل المتجهين $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (ل - ٤، م^{٢} - ٣ ، ١)، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٥، ١، ن^{٢}) متساويين

الحل

∵ $\overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{\text{ب}}$

∴ $\text{أ}_{\text{س}} = \text{ب}_{\text{س}}$ ⟵ ل - ٤ = ٥ ⟵ ل = ٩

$\text{أ}_{\text{ص}} = \text{ب}_{\text{ص}}$ ⟵ م^{٢} - ٣ = ١ ⟵ م^{٢} = ٤ ⟵ م = ±٢

$\text{أ}_{\text{ع}} = \text{ب}_{\text{ع}}$ ⟵ ن^{٢} = ١ ⟵ ن = ±١

حاول أن تحل

٤) إذا كان (٢س + ١، ٥، ك + ٤) = (-١، ص^{٢} - ٤، س + ١) فما قيمة س، ص، ك؟

متجه الوحدة

يعرف متجه الوحدة بأنه المتجه الذى معياره يساوى وحدة الأطوال

فمثلًا:

$\overrightarrow{\text{أ}} = (\frac{-٣}{١٣}، \frac{٤}{١٣}، \frac{١٢}{١٣})$ **متجه وحدة لأن:** $\|\overrightarrow{\text{أ}}\| = \sqrt{(\frac{-٣}{١٣})^{٢} + (\frac{٤}{١٣})^{٢} + (\frac{١٢}{١٣})^{٢}} = ١$

حاول أن تحل

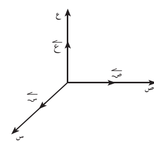
٥) بين أى المتجهات الآتية يمثل متجه وحدة

$\overrightarrow{\text{أ}} = (\frac{١}{٣}، \frac{٢}{٣}، \frac{٢}{٣})$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (\frac{١}{٥}، \frac{٤}{٥}، \frac{-\sqrt{٥}}{٥})$

متجهات الوحدة الأساسية ($\overrightarrow{\text{س}}، \overrightarrow{\text{ص}}، \overrightarrow{\text{ع}}$)

هى قطع مستقيمة موجهة بدايتها نقطة الأصل، ومعيارها وحدة الأطوال واتجاهها هو الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات س، ص، ع على الترتيب **أى إن:**

$\overrightarrow{\text{س}}$ = (١، ٠، ٠) ، $\overrightarrow{\text{ص}}$ = (٠، ١، ٠)، $\overrightarrow{\text{ع}}$ = (٠، ٠، ١)



تفكير ناقد

عبر عن المتجهات (-١، ٠، ٠) ، (٠، -١، ٠)، (٠، ٠، -١) بدلالة متجهات الوحدة الأساسية.

كتاب الجبر والهندسة الفراغية – الهندسة الفراغية ١٢٣

تساوى المتجهات فى الفراغ

⌑ بعد التأكيد على أهمية الالتزام بترتيب احداثيات الثلاثى المرتب لأى نقطة فى الفراغ وجه لطلابك السؤال التالى متى يتساوى متجهين فى الفراغ وساعدهم فى الإجابة بتعريف المتجه فى الفراغ حتى يعى الطلاب الشرط اللازم لتساوى متجهين فى الفراغ ولتأكيد ذلك المفهوم اعرض عليهم المثال الموضح ص١٢٣

التقييم المستمر (المحورو والمناقشة)

٤.فى بند حاول أن تحل ص١٢٣

⌑ ساعد الطلاب فى توظيف مفهوم تساوى المتجهات فى الفراغ لإيجاد قيم المتغيرات المجهولة

متجه الوحدة

⌑ وضح للطلاب مفهوم متجه الوحدة واطلب منهم قراءة التعريف الخاص به ص١٣١ وللتحقق من أن قيمه متجه الوحدة تساوى

⌑ الفت انتباهم إلى متجه الوحدة يمر بنقطة الأصل (٠، ٠، ٠)

ولهذا تعتد إيجاد البعد بين نقطة الأصل والنقطة التى يمثل بها متجه الوحدة فتكون قيمة هذا المتجه هى وحدة الأطوال(١).

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

⌑ فى بند حاول أن تحل ساعد الطلاب على إيجاد متجه الوحدة مع الاسترشاد بالمثال المحلول

متجهات الوحدة الأساسية:

وضح للطلاب مفهوم متجه الوحدة الاساسى كما هو وارد فى ص١٢٣ وأكد على ضرورة توافر ثلاثة شروط حتى يمكن أن تطلق عليه متجه وحده اساسى وهذه الشروط هى أن:

١ـ بداية نقطة الأصل

٢ـ معياره وحده الأطوال

٣ـ اتجاهه هو الاتجاه الموجب لمحور الاحداثيات ولهذا فهناك ثلاثة متجهات وحدة اساسية فى اتجاه الثلاث محاور المتعامدة س ، ص، ع على الترتيب.

حاول أن تحل (٤)

٢س + ١ = -١ ∴ س = -١

ص^{٢} - ٤ = ٥ ∴ ص^{٢} = ٩ ∴ ص = ±٣

ك + ٤ = ٠ ∴ ك = -٤

حاول أن تحل (٥)

$\|\overrightarrow{\text{أ}}\| = \sqrt{\frac{٩}{١٦٩} + \frac{٩}{١٦٩} + \frac{١٤٤}{١٦٩}} = ١$

∴ $\overrightarrow{\text{أ}}$ قيمة وحدة

$\|\overrightarrow{\text{ب}}\| = \sqrt{\frac{١}{٢٥} + \frac{١٦}{١٦٩} + \frac{٥}{٢٥}} = \sqrt{\frac{٢٢}{٢٥}}$

∴ $\overrightarrow{\text{ب}}$ ليست قيمة وحدة

تفكير ناقد

⌑ ناقش مع طلابك ما ورد فى بند تفكير ناقد فى نهاية ص١٢٣ وذلك باستخدام تعريف متجه الوحدة الأساسية وقيمة الاحداثيات فى كل ثلاثى الرتب موضح واستخدام هذا المنشط كتمهيد لتوضيح كيفية التعبير عن متجه فى الفراغ باستخدام متجهات الوحدة الأساسية.

التعبير عن متجه فى الفراغ بدلالة متجهات الوحدة الأساسية:

⌑ وضح للطلاب أنه إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (اس ، اص ، اع) ذكرهم بتعريف متجه الوحدة الأساسى وأنه يوجد متجه فى اتجاه المحاور الثلاثة الأساسية ويرمز لها بالرمز $\overrightarrow{\text{س}}$ ، $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ع}}$ ، واربط هذا المفهوم بمتجه الموضع والمركبة المتجه فى اتجاه كل محور، واخيرًا ساعدهم على معرفة انه يمكن التعبير عن أى قيمة فى الفراغ بدلالة متجه الوحدة الأساسى كما يلى: $\overrightarrow{\text{أ}}$ = اس $\overrightarrow{\text{س}}$ + اص $\overrightarrow{\text{ص}}$ + اع $\overrightarrow{\text{ع}}$ موضحًا أن اس ، اص، اع هى المركبات فى اتجاه س، ص، ع وأن $\overrightarrow{\text{س}}$ ، $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ع}}$ ، هى متجهات الوحدة الأساسية فى نفس الاتجاه

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

٦.فى بند حاول أو تحل ص١٢٤ :

⌑ ساعد الطلاب فى الوصول إلى الإجابة الصحيحة والاستفادة من مفهوم متجه الوحدة الاساسى وكيفية التعبير عن متجه بواسطته

⌑ ومن خلال المثال الموضح فى نفس الصفحة وضح لهم كيفية إيجاد $\|\overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ب}}\|$

$$\|\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}\| \neq \|\overrightarrow{\text{أ}}\| + \|\overrightarrow{\text{ب}}\|$$

حاول أن تحل (٦)

$$٣\overrightarrow{\text{أ}} - ٥\overrightarrow{\text{ب}} = (.، -٩، -٣) - (١٥، ٠، -١) = (-١٥، -٩، ٧)$$

$$\|\overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ب}}\| = \sqrt{٩+١+١} = \sqrt{١١}$$

التعبير عن متجه فى الفراغ بدلالة متجهات الوحدة الأساسية

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (اس، اص، اع) ∋ $ح^٣$ فإن المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ يمكن كتابته على الصورة

$\overrightarrow{\text{أ}}$ = (اس، ٠، ٠) + (٠، اص، ٠) + (٠، ٠، اع)

= اس(١، ٠، ٠) + اص(٠، ١، ٠) + اع(٠، ٠، ١)

= اس $\overrightarrow{\text{س}}$ + اص $\overrightarrow{\text{ص}}$ + اع $\overrightarrow{\text{ع}}$

مثال

٥ إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = ٢ $\overrightarrow{\text{س}}$ - ٣ $\overrightarrow{\text{ص}}$ + $\overrightarrow{\text{ع}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = - $\overrightarrow{\text{س}}$ - ٢ $\overrightarrow{\text{ص}}$ أوجد

أ ٢ $\overrightarrow{\text{أ}}$ - ٣ $\overrightarrow{\text{ب}}$

ب $\|\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}\|$ ، $\|\overrightarrow{\text{أ}}\| + \|\overrightarrow{\text{ب}}\|$ ماذا تستنتج؟

الحل

أ ٢ $\overrightarrow{\text{أ}}$ - ٣ $\overrightarrow{\text{ب}}$ = ٢ (٢ $\overrightarrow{\text{س}}$ - ٣ $\overrightarrow{\text{ص}}$ + $\overrightarrow{\text{ع}}$) -٣ (- $\overrightarrow{\text{س}}$ - ٢ $\overrightarrow{\text{ص}}$)

= ٤ $\overrightarrow{\text{س}}$ - ٦ $\overrightarrow{\text{ص}}$ + ٢ $\overrightarrow{\text{ع}}$ + ٣ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٦ $\overrightarrow{\text{ص}}$

∴ ٢ $\overrightarrow{\text{أ}}$ - ٣ $\overrightarrow{\text{ب}}$ = ٧ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٢ $\overrightarrow{\text{ع}}$

ب $\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٢ $\overrightarrow{\text{س}}$ - ٣ $\overrightarrow{\text{ص}}$ + $\overrightarrow{\text{ع}}$) + (- $\overrightarrow{\text{س}}$ - ٢ $\overrightarrow{\text{ص}}$)

= $\overrightarrow{\text{س}}$ - ٥ $\overrightarrow{\text{ص}}$ + $\overrightarrow{\text{ع}}$

∴ $\|\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}\|$ = $\sqrt{١^٢ + (-٥)^٢ + ١^٢}$ = $\sqrt{٢٧}$

$\|\overrightarrow{\text{أ}}\| + \|\overrightarrow{\text{ب}}\|$ = $\sqrt{٢^٢ + (-٣)^٢ + ١^٢}$ + $\sqrt{(-١^٢) + (-٢)^٢}$

= $\sqrt{١٤}$ + $\sqrt{٥}$

نلاحظ أن $\|\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}\| \neq \|\overrightarrow{\text{أ}}\| + \|\overrightarrow{\text{ب}}\|$

حاول أن تحل

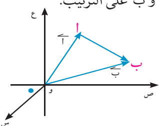
٦ إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = -٣ $\overrightarrow{\text{ص}}$ - $\overrightarrow{\text{ع}}$ + ٥ $\overrightarrow{\text{س}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = -٢ $\overrightarrow{\text{ع}}$ + ٣ $\overrightarrow{\text{س}}$ أوجد

أ ٣ $\overrightarrow{\text{أ}}$ - ٥ $\overrightarrow{\text{ب}}$

ب $\|\overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ب}}\|$

التعبير عن قطعة مستقيمة موجهة فى الفراغ بدلالة إحداثيات طرفيها

بفرض أن أ، ب نقطتان فى الفراغ، متجها موضعهما بالنسبة لنقطة الأصل هما $\overrightarrow{\text{وأ}}$ ، $\overrightarrow{\text{وب}}$ على الترتيب.



∵ $\overrightarrow{\text{وأ}}$ + $\overrightarrow{\text{أب}}$ = $\overrightarrow{\text{وب}}$

∴ $\overrightarrow{\text{أب}}$ = $\overrightarrow{\text{وب}}$ - $\overrightarrow{\text{وأ}}$

أو $\overrightarrow{\text{أب}}$ = $\overrightarrow{\text{ب}}$ - $\overrightarrow{\text{أ}}$

مثال

٦) إذا كان أ (-٢، ٣، ١) ، ب (٤، ٠، ٢) فإن

$\overrightarrow{\text{أب}}$ = $\overrightarrow{\text{ب}}$ - $\overrightarrow{\text{أ}}$

= (٤، ٠، ٢) - (-٢، ٣، ١) = (٦، -٣، ١)

$\overrightarrow{\text{ب أ}}$ = $\overrightarrow{\text{أ}}$ - $\overrightarrow{\text{ب}}$

= (-٢، ٣، ١) - (٤، ٠، ٢) = (-٦، ٣، -١)

نلاحظ أن: $\overrightarrow{\text{أب}}$ = - $\overrightarrow{\text{ب أ}}$

حاول أن تحل

٧) أ) إذا كان أ (٢، -٣، ٠) ب (١، ٤، -١) أوجد $\overrightarrow{\text{أب}}$

ب) إذا كان أ (١، ١، -٢)، $\overrightarrow{\text{أب}}$ (٤، -١، ٢) أوجد إحداثيات نقطة ب

متجه الوحدة فى اتجاه متجه معلوم *Unit vector in acertain direction*

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (أ$_{س}$، أ$_{ص}$، أ$_{ع}$) ∈ ح^{٣} فإن متجه الوحدة فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ يرمز له بالرمز $\overrightarrow{\text{ى}}_{\text{أ}}$ يعطى بالعلاقة:

$$\overrightarrow{\text{ى}}_{\text{أ}} = \frac{\overrightarrow{\text{أ}}}{\|\overrightarrow{\text{أ}}\|}$$

مثال

٧) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (-٢، ٢، ١)، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٣، ١، -٢) أوجد متجه الوحدة فى اتجاه كل من $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{أب}}$

الحل

$$\overrightarrow{\text{ى}}_{\text{أ}} = \frac{\overrightarrow{\text{أ}}}{\|\overrightarrow{\text{أ}}\|} = \frac{(-٢، ٢، ١)}{\sqrt{٤ + ٤ + ١}} = (\frac{-٢}{٣}، \frac{٢}{٣}، \frac{١}{٣})$$

$$\overrightarrow{\text{ى}}_{\text{ب}} = \frac{\overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{ب}}\|} = \frac{(٣، ١، -٢)}{\sqrt{٩ + ١ + ٤}} = (\frac{٣}{\sqrt{١٤}}، \frac{١}{\sqrt{١٤}}، \frac{-٢}{\sqrt{١٤}})$$

$\overrightarrow{\text{أب}}$ = $\overrightarrow{\text{ب}}$ - $\overrightarrow{\text{أ}}$

= (٣، ١، -٢) - (-٢، ٢، ١) = (٥، -١، -٣)

$$\therefore \overrightarrow{\text{ى}}_{\text{أب}} = \frac{\overrightarrow{\text{أب}}}{\|\overrightarrow{\text{أب}}\|} = \frac{(٥، -١، -٣)}{\sqrt{٢٥ + ١ + ٩}} = (\frac{٥}{\sqrt{٣٥}}، \frac{-١}{\sqrt{٣٥}}، \frac{-٣}{\sqrt{٣٥}})$$

كتاب الجبر والهندسة الفراغية - الهندسة الفراغية ١٢٥

التعبير عن قطعة مستقيمة موجهة فى الفراغ بدلالة احداثيات طرفيها = ٠

- بعد أن تعرف الطالب على مفهوم متجه الموضع وقيمة الوحدة وضح لهم كيفية الاستفادة من مفهوم متجه الموضع فى التعبير عن قطعة مستقيمة موجهة فى الفراغ بدلالة احداثيات طرفيها.
- ويمكن الاستعانة بمفهوم جمع المتجهات للوصول إلى المتجه الذى يعبر عن تلك القطعة المستقيمة الموجهة كما موضح فى الشكل ص١٢٤
- ولتدريب الطلاب على كيفية التعبير عن قطعة مستقيمة موجهة اطلب منهم قراءة المثال الموضح ص١٢٥ مع التأكيد على أن

$\overrightarrow{\text{أب}}$ ≠ $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ وإنما

$\overrightarrow{\text{أب}}$ = - $\overrightarrow{\text{ب أ}}$

- واطلب منهم توضيح السبب وذلك باستخدام مفرداتهم الخاصة.

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

٧. فى بند حاول أن تحل ص١٢٥

- وضح للطلاب انه اطلب $\overrightarrow{\text{أب}}$ عبارة عن المتجه الناتج من طرح احداثيات نقطة النهاية من احداثيات نقطة البداية $\overrightarrow{\text{ب}}$ - $\overrightarrow{\text{أ}}$

متجه الوحدة فى اتجاه متجه معلوم

- وضح للطلاب كيفية إيجاد متجه الوحدة لمتجه فى اتجاه معين وذلك من خلال العلاقة من المتجه ومعياره وذلك بالإستعانة بالمثال الموضح حيث يمكن إيجاد متجه الوحدة للمتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ $\overrightarrow{\text{ب}}$.
- كما يمكن من خلال المثال ملاحظة أنه يمكن إيجاد قيمة وحدة لمتجه $\overrightarrow{\text{أب}}$

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

٨. فى بند حاول أن تحل ص١٢٥

- ساعد الطلاب فى الوصول للإجابة الصحيحة.

أ) $\overrightarrow{\text{أب}}$ = (-١ ، ٧ ، -١)

ب) (٤ ، -١ ، ٢) = $\overrightarrow{\text{ب}}$ - $\overrightarrow{\text{أ}}$

$\overrightarrow{\text{ب}}$ = (١ ،١، -٢) - (٤ ، -١، ٢)

$\overrightarrow{\text{ب}}$ = (-٣ ، ٢ ، ٠)

زوايا الاتجاه وجيوب تمام الاتجاه لمتجه فى الفراغ:

- ساعد الطلاب على تصور كيفية تحديد الزاوية التى يصنعها متجه فى الفراغ مع المحاور الأساسية الثلاثة ($\theta_{\text{س}}$ ، $\theta_{\text{ص}}$ ، $\theta_{\text{ع}}$) ووضح لهم أنه يمكن إيجاد مركبة المتجه فى اتجاه المحاور الثلاثة باستخدام حيث تمام زاوية هذا المتجه على هذا المحور حيث
- $\text{أ}_{\text{س}} = \|\overleftarrow{\text{أ}}\| \text{ جتا } \theta_{\text{س}}$ وهكذا موضحًا إنه باستخدام خواص المثلث القائم والنسب المثلثية وأن $\|\overleftarrow{\text{أ}}\|$ يعبر عن البعد العمودى بين نقطة نهاية هذا المتجه والمحور.

وضح لطلابك كيفية التعبير عن متجه باستخدام متجهات الوحدة كما يلى:

$$\overleftarrow{\text{أ}} = \|\overleftarrow{\text{أ}}\| \text{ جتا } \theta_{\text{س}} \overleftarrow{\text{س}} + \|\overleftarrow{\text{أ}}\| \text{ جتا } \theta_{\text{ص}} \overleftarrow{\text{ص}} + \|\overleftarrow{\text{أ}}\| \text{ جتا } \theta_{\text{ع}} \overleftarrow{\text{ع}}$$

وضح للطلاب أن

- $\text{جتا } \theta_{\text{س}} \overleftarrow{\text{س}} + \text{جتا } \theta_{\text{ص}} \overleftarrow{\text{ص}} + \text{جتا } \theta_{\text{ع}} \overleftarrow{\text{ع}}$ تعبر عن متجه الوحدة فى اتجاه المتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ ولأن معيار متجه الوحدة فإن:
  $\text{جتا}^2 \theta_{\text{س}} + \text{جتا}^2 \theta_{\text{ص}} + \text{جتا}^2 \theta_{\text{ع}} = ١$
- ناقش مع الطلاب المثال الموضح ص١٢٦ موضحًا لهم انه للتعبير عن متجه بالصورة الجبرية (المرتبات التاريزية) فلابد من تحليل المتجه إلى مركبتين الأولى فى اتجاه $\overleftarrow{\text{وع}}$ لأن الزاوية المعطاه بين المتجه و $\overleftarrow{\text{ع}}$ ثم المركبة الثانية تقع فى المستوى الاحداثى س ص وذلك بإيجاد جتا $\theta_{\text{ع}}$ ، جا $\theta_{\text{ع}}$ ، ثم تكرار نفس الخطوات لتحليل مركبة المتجه أس ص إلى مركبتين فى اتجاه س ، ص
- ولايجاد قياسات زوايا الاتجاه لابد من مفهوم متجه الوحدة فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أ}}$ واستخدام معكوس النسبة المثلثين لإيجاد وقيمة تلك الزوايا.

الوحدة الأولى: الهندسة والقياس فى بعدين وثلاثة أبعاد

حاول أن تحل

(٨) أوجد متجه الوحدة فى اتجاه كل من المتجهات الآتية:

أ) $\overleftarrow{\text{أ}} = (٨، -٤، -٨)$ ب) $\overleftarrow{\text{ب}} = \overleftarrow{\text{س}} - ٢\overleftarrow{\text{ص}} - \overleftarrow{\text{ع}}$ ج) $\overleftarrow{\text{جـ}} = ٣\overleftarrow{\text{س}} - ٤\overleftarrow{\text{ع}}$

زوايا الاتجاه وجيوب تمام الاتجاه لمتجه فى الفراغ

إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_{\text{س}}، \text{أ}_{\text{ص}}، \text{أ}_{\text{ع}})$ متجه فى الفراغ وكانت $(\theta_{\text{س}}، \theta_{\text{ص}}، \theta_{\text{ع}})$ قياسات الزوايا التى يصنعها المتجه مع الاتجاه الموجب لمحاور س، ص، ع على الترتيب فإن:

$\text{أ}_{\text{س}} = \|\overleftarrow{\text{أ}}\| \text{ جتا } \theta_{\text{س}}$ ، $\text{أ}_{\text{ص}} = \|\overleftarrow{\text{أ}}\| \text{ جتا } \theta_{\text{ص}}$ ، $\text{أ}_{\text{ع}} = \|\overleftarrow{\text{أ}}\| \text{ جتا } \theta_{\text{ع}}$

$\therefore \overleftarrow{\text{أ}} = \|\overleftarrow{\text{أ}}\| \text{ جتا } \theta_{\text{س}} \overleftarrow{\text{س}} + \|\overleftarrow{\text{أ}}\| \text{ جتا } \theta_{\text{ص}} \overleftarrow{\text{ص}} + \|\overleftarrow{\text{أ}}\| \text{ جتا } \theta_{\text{ع}} \overleftarrow{\text{ع}}$

$= \|\overleftarrow{\text{أ}}\| (\text{جتا } \theta_{\text{س}} \overleftarrow{\text{س}} + \text{جتا } \theta_{\text{ص}} \overleftarrow{\text{ص}} + \text{جتا } \theta_{\text{ع}} \overleftarrow{\text{ع}})$

$(\theta_{\text{س}}، \theta_{\text{ص}}، \theta_{\text{ع}})$ تسمى زوايا الاتجاه للمتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$

جتا $\theta_{\text{س}}$، جتا $\theta_{\text{ص}}$، جتا $\theta_{\text{ع}}$ تسمى جيوب تمام الاتجاه للمتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$

ع
أ
اع
$\theta_{\text{ع}}$
$\theta_{\text{ص}}$
$\theta_{\text{س}}$
اص
اس
ص
س

لاحظ أن: $\text{جتا } \theta_{\text{س}} \overleftarrow{\text{س}} + \text{جتا } \theta_{\text{ص}} \overleftarrow{\text{ص}} + \text{جتا } \theta_{\text{ع}} \overleftarrow{\text{ع}}$ تمثل متجه الوحدة فى اتجاه المتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ أى إن

$\text{جتا}^2 \theta_{\text{س}} + \text{جتا}^2 \theta_{\text{ص}} + \text{جتا}^2 \theta_{\text{ع}} = ١$

مثال

(٨) الشكل المقابل يمثل متجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ معياره ١٠ وحدات

أ) عبر عن المتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ بالصورة الجبرية (المركبات الكارتيزية)

ب) أوجد قياسات زوايا الاتجاه للمتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$

ع
أ
°٤٠
و
°٧٠
ص
س

الحل

أولًا نحلل $\overleftarrow{\text{أ}}$ إلى مركبتين: الأولى فى اتجاه $\overleftarrow{\text{وع}}$ ومقدارها

$\text{أ}_{\text{ع}} = \|\overleftarrow{\text{أ}}\| \text{ جتا } \theta_{\text{ع}} = ١٠ \text{ جتا } ٤٠ = ٧,٦٦$

والثانية تقع فى المستوى الإحداثى س ص

$\text{أ}_{\text{س ص}} = \|\overleftarrow{\text{أ}}\| \text{ جا } \theta_{\text{ع}} = ١٠ \text{ جا } ٤٠ = ٦,٤٢٨$

الآن نحلل المركبة $\text{أ}_{\text{س ص}}$ إلى مركبتين: الأولى فى اتجاه $\overleftarrow{\text{وس}}$ ومقدارها

$\text{أ}_{\text{س}} = \text{أ}_{\text{س ص}} \text{ جتا } ٧٠ = ٦,٤٢٨ \text{ جتا } ٧٠ = ٢,١٩٩$

والثانية فى اتجاه $\overleftarrow{\text{وص}}$ ومقدارها

$\text{أ}_{\text{ص}} = \text{أ}_{\text{س ص}} \text{ جا } ٧٠ = ٦,٤٢٨ \text{ جا } ٧٠ = ٦,٠٤$

١٢٦ الصف الثالث الثانوى - كتاب الطالب

التقسيم المستمر والحوار والمناقشة

- ٩ـ فى بند حاول أن تحل ص١٢٦ اطلب من طلابك قراءة التمرين وتوضيح القوة المعطاة على الشكل، واطلب منهم كتابة الصورة الجبرية لمتجه موضحًا انها عبارة عن مجموع مركبات المتجه فى اتجاه المحاور الاساسية الثلاثة المتعامدة مضروبه فى قيمة الوحدة لكل محور $\overleftarrow{\text{أ}} = \text{أس } \overleftarrow{\text{س}} + \text{أص } \overleftarrow{\text{ص}} + \text{أع } \overleftarrow{\text{ع}}$
- وساعدهم فى الوصول للإجابة الصحيحة وهى:

أ) $\overleftarrow{\text{ى}_{\text{أ}}} = \dfrac{\overleftarrow{\text{ى}_{\text{أ}}}}{\|\overleftarrow{\text{ى}_{\text{أ}}}\|} = \dfrac{(٨ ، -٤ ، -٨)}{\sqrt{٦٤ + ١٦ + ٦٤}}$

$\overleftarrow{\text{ى}_{\text{أ}}} = \dfrac{(٨ ، -٤ ، -٨)}{١٢} = (\frac{٢}{٣} ، \frac{-١}{٣} ، \frac{-٢}{٣})$

وبذلك تكون الصورة الكارتيزية للمتجه $\vec{أ}$ هى

$\vec{أ}$ = أس $\vec{س}$ + أص $\vec{ص}$ + أع $\vec{ع}$

= ٢,١٩٩ $\vec{س}$ + ٦,٠٤ $\vec{ص}$ + ٧,٦٦ $\vec{ع}$

ثانيًا: ولإيجاد زوايا الاتجاه نوجد متجه الوحدة فى اتجاه $\vec{أ}$

$\vec{ى}_{أ}$ = $\frac{\vec{أ}}{||\vec{أ}||}$ = $\frac{١}{١٠}$ (٢,١٩٩ $\vec{س}$ + ٦,٠٤ $\vec{ص}$ + ٧,٦٦ $\vec{ع}$)

= ٠,٢١٩٩ $\vec{س}$ + ٠,٦٠٤ $\vec{ص}$ + ٠,٧٦٦ $\vec{ع}$

∴ جتا $\theta_{س}$ = ٠,٢١٩٩ ومنها $\theta_{س}$ = جتا$^{-١}$ (٠,٢١٩٩) = ٧٧,٣°

جتا $\theta_{ص}$ = ٠,٦٠٤ ومنها $\theta_{ص}$ = جتا$^{-١}$ (٠,٦٠٤) = ٥٢,٨٤°

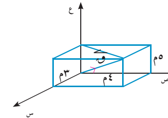
جتا $\theta_{ع}$ = ٠,٧٦٦ ومنها $\theta_{ع}$ = جتا$^{-١}$ (٠,٧٦٦) = ٤٠°

حاول أن تحل

(٩) الشكل المقابل يمثل قوة $\vec{ق}$ مقدارها ٢٠٠ نيوتن

أ) عبر عن القوة $\vec{ق}$ بالصورة الجبرية.

ب) أوجد قياسات زوايا الاتجاه للقوة $\vec{ق}$.



تمارين (١-٢)

أكمل ما يأتى:

(١) إذا كان $\vec{أ}$ = (-٣، ٤، ٢) فإن || $\vec{أ}$ || = ...

(٢) إذا كان $\vec{أ}$ = $\vec{س}$ - ٢$\vec{ص}$ + ٣ $\vec{ع}$ ، $\vec{ب}$ = ٣$\vec{ص}$ - $\vec{ع}$ فإن $\vec{أ}$ - $\vec{ب}$ = ...

(٣) متجه الوحدة فى اتجاه $\vec{أب}$ حيث أ (-١، ٢، ٠) ، ب (٣، -١، ٢) هو ....

(٤) المتجه $\vec{أ}$ = ٣ $\vec{س}$ + $\vec{ص}$ - ٢ $\vec{ع}$ يصنع زاوية قياسها .... مع الاتجاه الموجب لمحور س.

(٥) المتجه $\vec{ب}$ = $\vec{س}$ + ٢$\vec{ص}$ يصنع زاوية قياسها .... مع الاتجاه الموجب لمحور ع.

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(٦) إذا كان $\vec{أ}$ = (-٢، ك، ١) وكان || $\vec{أ}$ || = ٣ وحدات فإن ك = ...

أ) ٤ ب) -٤ ج) ± ٢ د) $\sqrt{١٤}$

بعض إجابات تمارين الدرس الثاني من ١٢٧ إلى ١٢٨

(١) $\sqrt{٢٥}$

(٢) $\vec{س}$ - ٥ $\vec{ص}$ + ع $\vec{ع}$

(٣) ($\frac{٤}{\sqrt{٢٩}}$ ، $\frac{-٣}{\sqrt{٢٩}}$ ، $\frac{٢}{\sqrt{٢٩}}$)

(٤) ٤٢ ٣٦َ°

(٥) ٩٠°

(٧) ٦٨,٦°

(٨) ب

(١٠)

أ) $\vec{أ}$ + $\vec{ب}$ = (٢، -٣، ١) + (٤، -٢، ٠) = (٦، -٥، ١)

ب) ٣ $\vec{أ}$ + $\frac{١}{٣}$ $\vec{ج}$ = ٣(٢، -٣، ١) - $\frac{١}{٣}$ (-٦، ٠، ٣)

= (٦، -٩، ٣) + (٢، ٠، -١) = (٨، -٩، ٢)

ج) $\frac{٣}{٢}$ $\vec{ب}$ + $\frac{٢}{٣}$ $\vec{ج}$ = $\frac{٣}{٢}$ (٤، -٢، ٠) + $\frac{٣}{٢}$ (-٦، ٠، ٣)

= (٦، -٣، ٠) + (-٤، ٠، ٢) = (٢، -٣، ٢)

(١١)

أ) ٢ $\vec{أ}$ + $\vec{ب}$ = ٢(٢ $\vec{س}$ - ٣ $\vec{ص}$ + ٥ $\vec{ع}$) + (٤ $\vec{ص}$ - ٢ $\vec{ع}$)

= (٤ $\vec{س}$ - ٦ $\vec{ص}$ + ١٠ $\vec{ع}$) + (٤ $\vec{ص}$ - ٢ $\vec{ع}$)

= ٤ $\vec{س}$ - ٢ص + ٨ $\vec{ع}$

ب) $\frac{١}{٢}$ $\vec{ب}$ - $\vec{ج}$ = $\frac{١}{٢}$ (٤ $\vec{ص}$ - ٢ $\vec{ع}$) - (٤ $\vec{س}$ + ٥ $\vec{ص}$ - ٦ $\vec{ع}$)

= (٢ $\vec{ص}$ - $\vec{ع}$) + (-٤ $\vec{س}$ - ٥ $\vec{ص}$ + ٦ $\vec{ع}$)

= -٤ $\vec{س}$ - ٣ $\vec{ص}$ + ٥ $\vec{ع}$

ج) ٣ $\vec{أ}$ - ٢ $\vec{ج}$ = ٣ (٢ $\vec{س}$ - ٣ $\vec{ص}$ + ٥ $\vec{ع}$) - ٢ (٤ $\vec{س}$ + ٥ $\vec{ص}$ - ٦ $\vec{ع}$)

= (٦ $\vec{س}$ - ٩ $\vec{ص}$ + ١٥ $\vec{ع}$) + (-٨ $\vec{س}$ - ١٠ $\vec{ص}$ + ١٢)

= -٢ $\vec{س}$ - ١٩ $\vec{ص}$ + ٢٧ $\vec{ع}$.

١٢ أ ||أ→|| = $\sqrt{٤ + ١ + ٠}$ = $\sqrt{٥}$

ب ||ب→|| = $\sqrt{١ + ٤ + ٤}$ = ٣ جـ ||جـ→|| = ١

د ||ى→|| = $\sqrt{١ + ١٦}$ = $\sqrt{١٧}$

١٣ أ→ = (ك، ٠، ٠)

∵ أ→ = ك (١، ٠، ٠)

= ك س→

∴ ||أ→|| = ||ك س→||

= |ك| ||س→||

١٤ -

فى الشكل: او = $\sqrt{٥}$، △ او ب القائم فى و يكون: اب = $\sqrt{٥ + ٤}$ = ٣

وبفرض أن اب→ يمثل القوة ق→ بمقياس رسم معين:

∴ اس = ق جتا θ س = ق × $\frac{٢}{٣}$ = $\frac{٢}{٣}$ ق

اص ع = ق جا θ س = ق × $\frac{\sqrt{٥}}{٣}$ = $\frac{\sqrt{٥}}{٣}$ ق

∴ اص = $\frac{-\sqrt{٥}}{٣}$ ق جتا (اوجـ)

= $\frac{-\sqrt{٥}}{٣}$ ق × $\frac{١}{\sqrt{٥}}$ = $\frac{١٠}{٣}$ ق

اع = $\frac{-\sqrt{٥}}{٣}$ ق جا (اوجـ) = $\frac{-\sqrt{٥}}{٣}$ ق × $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$ = $\frac{-٢}{٣}$ ق

∴ ق→ = $\frac{٢}{٣}$ ق س→ - $\frac{١}{٣}$ ق ص→ - $\frac{٢}{٣}$ ق ع→

= $\frac{٤}{٣}$ س→ - $\frac{٢٠}{٣}$ ص→ - $\frac{٤٠}{٣}$ ع→

حل آخر لرقم ١٤

اب→ = (٢، ٠، ٠) - (٠، ١، ٢) = (٢، -١، -٢)

بفرض أن ق→ = ك(٢، -١، -٢) (١) حيث ك > ٠

∴ ||ق→|| = ك $\sqrt{٩}$ = ٣ ك

∴ ٢٠ = ٣ ك

∴ ك = $\frac{٢٠}{٣}$

بالتعويض عن ك فى (١) يكون:

= $\frac{٢٠}{٣}$ (٢، -١، -٢)

= $\frac{٤٠}{٣}$ س→ - $\frac{٢٠}{٣}$ ص→ - $\frac{٤٠}{٣}$ ع→

الوحدة الأولى: الهندسة والقياس فى بعدين وثلاثة أبعاد

٧ إذا كان ٣٠°، ٧٠°، θ هى زوايا الاتجاه لمتجه فإن θ = ...

أ ١٠٠° ب ٨٠° جـ ٢٦٠° د ٦٨,٦°

٨ إذا كان أ→ = (-١، ٥، -٢)، ب→ = (٣، ١، ١) وكان أ→ + ب→ + جـ→ = س→ فإن جـ→ = ...

أ س→ + ٦ص→ - ع→ ب -س→ - ٦ص→ + ع→

جـ س→ + ٤ص→ - ٣ع→ د س→ + ٤ص→ - ع→

٩ جيوب تمام زوايا الاتجاه للمتجه أ→ = (-٢، ١، ٢) هى ....

أ (-٢، ١، ٢) ب ($\frac{-٢}{٣}$، $\frac{١}{٣}$، $\frac{٢}{٣}$) جـ ($\frac{٥}{-٢}$، ٥، $\frac{٥}{٢}$) د (-١، ١، ١)

أجب عما يأتى:

١٠ إذا كان أ→ = (٢، -٣، ١) ، ب→ = (٤، -٢، ٠) ، جـ→ = (-٦، ٠، ٣) أوجد كلًّا من المتجهات الآتية:

أ أ→ + ب→ ب ٣ أ→ - $\frac{١}{٣}$ جـ→ جـ $\frac{٣}{٢}$ ب→ + $\frac{٢}{٣}$ جـ→

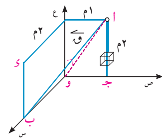
١١ إذا كان أ→ = ٢س→ - ٣ص→ + ٥ع→ ، ب→ = ٤ص→ - ٢ع→ ، جـ→ = ٤س→ + ٥ص→ - ٦ع→ أوجد كلًّا من المتجهات الآتية:

أ ٢ أ→ + ب→ ب $\frac{١}{٢}$ ب→ - جـ→ جـ ٣ أ→ - ٢جـ→

١٢ أوجد معيار كل من المتجهات الآتية:

أ أ→ = (٢، -١، ٠) ب ب→ = (١، ٢، -٢) جـ جـ→ = ع→ د ى→ = س→ - ٤ص→

١٣ إذا كان أ→ = (ك، ٠، ٠) ، س→ = (١، ٠، ٠) أثبت أن ||أ→|| = |ك| ||س→||



١٤ إذا كانت قوة الشد فى الخيط تساوى ٢٠ نيوتن أوجد المركبات الجبرية للقوة ق→

١٥ سؤال مفتوح: إذا كان المتجه أ→ يوازى المستوى الإحداثى ص ع. ماذا يمكن أن تقول عن إحداثيات المتجه أ→

١٦ سؤال مفتوح: إذا كان أ→ ، ب→ متجهين فى ح٣. هل ||أ→ + ب→|| = ||أ→|| + ||ب→|| إذا كان الطرفان غير متساويين. أىُّ الطرفين هو الأكبر؟

١٧ تفكير إبداع: أوجد الصورة الجبرية للمتجه أ→ الذى معياره ٥ وحدات، ويصنع مع محاور الإحداثيات زوايا اتجاه متساوية فى القياس.

١٢٨ الصف الثالث الثانوى – كتاب الطالب

الوحدة الأولى

١ - ٣

ضرب المتجهات

Vectors multiplication

- يتعرف المجموعة اليمينية من متجهات الوحدة
- يوجد حاصل الضرب الثلاثى القياسى
- يستنتج المعنى الهندسى لحاصل الضرب الثلاثى القياسى

مفردات اساسية :

ضرب قياسي - ضرب اتجاهي - مركبة متجه الوحدة - الشغل - مسقط قاعدة اليد اليمنى - الضرب الثلاثي القياسي

المواد التعليمية المستخدمة

سبورة تعليمية - مجسمات برامة رسومية توضح الأشكال ثلاثة الأبعاد

طرق التدريس المقترحة :

العرض المباشر - المناقشة والحوار حل المشكلات - التعلم التعاونى .

مصادر التعلم:

كتاب الطالب من ص ١٢٩ إلى ص ١٤٣

الوحدة الأولى

١ - ٣

ضرب المتجهات

Vectors multiplication

تعلمت سابقًا إجراء بعض العمليات على المتجهات، مثل الجمع وضرب المتجه فى عدد حقيقى، ولكنك قد تكون قد تساءلت: هل يمكن إجراء عملية الضرب فى حقل المتجهات؟ والجواب: نعم. هناك نوعان من ضرب المتجهات، هما الضرب القياسى لمتجهين والضرب الاتجاهى لمتجهين. وفى هذا الدرس نتناول هذين النوعين من الضرب بالشرح والتحليل، وخواصهما الجبرية والهندسية، وتطبيقاتهما الفيزيائية؛ ليكون ذلك معينًا لك فى دراسة الميكانيكا.

سوف تتعلم

- الضرب القياسى لمتجهين فى المستوى وفى الفراغ.
- توازى وتعامد متجهين.
- الزاوية بين متجهين.
- مركبة متجه فى اتجاه متجه آخر .
- مسقط متجه فى اتجاه متجه آخر.
- الشغل المبذول بواسطة قوة.
- الضرب الاتجاهى لمتجهين فى المستوى وفى الفراغ.
- المعنى الهندسى لحاصل الضرب الاتجاهى.
- المجموعة اليمينية من متجهات الوحدة.
- حاصل الضرب الثلاثى القياسى.
- المعنى الهندسى لحاصل الضرب الثلاثى القياسى.

مصطلحات أساسية

- ضرب قياسى *scalar product*
- ضرب اتجاهى *vectar product*
- مركبة *component*
- متجه الوحدة *unit vector*
- الشغل *work*
- قاعدة اليد اليمنى *right hand rule*
- الضرب الثلاثى القياسى *scalar triple product*

الضرب القياسى لمتجهين *Scalar product of two vectors (Dot product)*

فكر و ناقش

إذا كان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهين، قياس الزاوية بينهما θ فأوجد:

١- مركبة المتجه $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{ب}$.

٢- حاصل ضرب معيار المتجه $\overrightarrow{ب}$ ومركبة المتجه $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{ب}$.

من بند فكر وناقش نستنتج أن:

١- مركبة المتجه $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{ب}$ تساوى $\|\overrightarrow{أ}\|$ جتاθ

٢- حاصل ضرب معيار المتجه $\overrightarrow{ب}$ ومركبة المتجه $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{ب}$ يساوى $\|\overrightarrow{ب}\| \, \|\overrightarrow{أ}\|$ جتاθ والقيمة المطلقة لهذا المقدار تعبر عن مساحة المستطيل الذى بعداه معيار المتجه $\overrightarrow{ب}$ ومركبة المتجه $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{ب}$.

تعلم

الضرب القياسى لمتجهين *Scalar product of two vectors*

إذا كان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهين، قياس الزاوية بينهما θ فإن مساحة المستطيل الذى بعداه معيار أحد المتجهين ومركبة المتجه الآخر عليه تعرف بالضرب القياسى للمتجهين ويرمز لهما بالرمزين $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}$

كتاب الجبر والهندسة الفراغية - الهندسة الفراغية ١٢٩

خلفية :

استكمالاً لتوظيف الخبرات السابقة لدى الطلاب فى إطار المتجهات اطلب منهم عرض امثلة لمت تم تعلمه من قبل وما تم تعلمه فى الوحدة الحالية موضحًا لهم أنه سبق وتم اجراء عملية جمع المتجهات فى المستوى بأكثر من طريقة وضرب متجه فى عدد حقيقى وبالتالى ستتعلم في درس اليوم كيفية ضرب متجهين فى الفراغ والطرق المختلفة لذلك.

مخرجات الدرس:

بعد دراسة هذا الدرس وتنفيذ انشطته يتوقع من الطالب أن:

- يتعرف مفهوم الضرب القياسى لمتجهين فى المستوى والفراغ .
- يحدد العلاقة بين متجهين فى حالة التوازى والتعامد
- يوجد الزاوية بين متجهين
- يحدد قيمة مركبة متجهه فى اتجاه متجه آخر
- يحدد مسقط متجه فى اتجاه متجه آخر
- يحسب قيمة الشغل المبذول بواسطة قوة
- يتعرف مفهوم الضرب الاتجاهى لمتجهين في المستوى وفى الفراغ
- يستنتج المعنى الهندسى لحاصل الضرب الاتجاهى

التهيئة :

- يبدأ المعلم بعرض نماذج لتمارين علي جمع المتجهات وضرب متجه فى عدد حقيقى ويطرح عليهم اسئلة تساعدهم علي تذكر العمليات علي المتجهات ثم يثير موضوع عملية الضرب علي المتجهات هل هى ممكنه وهل لها صورة وحيدة ووضح لهم أن ضرب المتجهات له صورتين سيتم التعرف عليها فى هذا الدرس:

اجراءات الدرس :

- ابدأ مع الطلاب بتوجيه سؤال عن مركبة المتجه وتعريف متجه الوحدة ومتجه الوحدة الأساسى الذى تم دراسته فى الدرس السابق.
- وناقش معهم " بند فكر وناقش" ص ١٢٩ مع توضيح أن المتجهين بينهما زاوية (θ) ولذا فيمكن إيجاد مركبة $\overleftarrow{\text{أ}}$ فى اتجاه $\overleftarrow{\text{ب}}$ باستخدام جيب تمام تلك الزاوية
- بعد إيجاد المطلوب فى الحالتين وتدريب الطلاب علي كيفية إيجادهم وضح لهم أن القيمة المطلقة لحاصل ضرب معيار متجه فى مركبة متجه آخر فى اتجاهه تساوى مساحة المستطيل الذى بعداه معيار أحد هذين المتجهين ر مركبة المتجه الآخر فى اتجاه مستعينًا بالشكل الموضح حيث يمكن حساب مساحة المثلث الموضح وهو تساوى نصف مساحة المستطيل المشار اليه .

فى بند تعلم ص ١٢٩

- وضح للطلاب انه يمكن اجراء عملية الضرب القياسى بين متجهين بينهما زاوية بإيجاد مساحة المستطيل الذى بعداه معيار أحد المتجهين ومركبة المتجه الآخر عليه وأن هذه العملية يطلق عليها الضرب القياسى لمتجهين ووضح رمز الرمز الخاص بعملية الضرب القياسى .
- ولمزيد من الفهم والاستيعاب ناقش مع الطلاب المثال الموضح ص ١٣٠ كتطبيق مباشرة لعملية الضرب القياسى لمتجهين .

الوحدة الأولى: الهندسة والقياس فى بعدين وثلاثة أبعاد

أى إن

$$\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{ب}} = \|\overleftarrow{\text{أ}}\| \, \|\overleftarrow{\text{ب}}\| \text{ جتا } \theta$$

مثال

(١) إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ متجهين، قياس الزاوية ٦٠° وكان $\|\overleftarrow{\text{أ}}\|$ = ٢ $\|\overleftarrow{\text{ب}}\|$ = ٨ أوجد $\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{ب}}$

الحل

$\|\overleftarrow{\text{أ}}\|$ = ٢ $\|\overleftarrow{\text{ب}}\|$ = ٨ ⟵ $\|\overleftarrow{\text{أ}}\|$ = ٨ ، $\|\overleftarrow{\text{ب}}\|$ = ٤

من تعريف الضرب القياسى

$\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{ب}} = \|\overleftarrow{\text{أ}}\| \, \|\overleftarrow{\text{ب}}\|$ جتا θ

= ٨ × ٤ × جتا ٦٠ = ١٦

حاول أن تحل

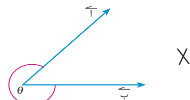
(١) إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ متجهين، قياس الزاوية بينهما ١٣٥° وكان $\|\overleftarrow{\text{أ}}\|$ = ٦ ، $\|\overleftarrow{\text{ب}}\|$ = ١٠ أوجد $\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{ب}}$

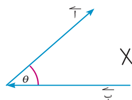
تفكير ناقد: ما الحالات التى يكون فيها حاصل الضرب القياسى يساوى الصفر؟

ملحوظات مهمة

١- لتحديد الزاوية بين المتجهين يجب أن يكون المتجهان خارجين (أو داخلين) لنفس النقطة.

٢- قياس الزاوية بين المتجهين ∋ [٠ ، π]





مثال

(٢) إذا كانت $\overleftarrow{\text{س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ع}}$ متجهات الوحدة لمجموعة يمينية، فأوجد كل من $\overleftarrow{\text{س}} \cdot \overleftarrow{\text{س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص}} \cdot \overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ع}} \cdot \overleftarrow{\text{ع}}$

الحل

$\overleftarrow{\text{س}} \cdot \overleftarrow{\text{س}} = \|\overleftarrow{\text{س}}\| \, \|\overleftarrow{\text{س}}\|$ جتا ٠°

= ١ × ١ × ١ = ١

بالمثل $\overleftarrow{\text{ص}} \cdot \overleftarrow{\text{ص}}$ = ١ ، $\overleftarrow{\text{ع}} \cdot \overleftarrow{\text{ع}}$ = ١

تذكر أن

معيار متجه الوحدة يساوى الواحد الصحيح.

حاول أن تحل

(٢) إذا كانت $\overleftarrow{\text{س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ع}}$ مجموعة يمينية من متجهات الوحدة، فأوجد كل من $\overleftarrow{\text{س}} \cdot \overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص}} \cdot \overleftarrow{\text{ع}}$ ، $\overleftarrow{\text{ع}} \cdot \overleftarrow{\text{س}}$

١٣٠ الصف الثالث الثانوى - كتاب الطالب

حاول أن تحل (١)

$$\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{ب}} = \|\overleftarrow{\text{أ}}\| \, \|\overleftarrow{\text{ب}}\| \text{ جتا } \theta$$

$$\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{ب}} = ٦ \times ١٠ \times \text{ جتا } ١٣٥$$

(٢)

$\overleftarrow{\text{س}} \cdot \overleftarrow{\text{ص}}$ = صفر

$\overleftarrow{\text{ص}} \cdot \overleftarrow{\text{ع}}$ = صفر

$\overleftarrow{\text{ع}} \cdot \overleftarrow{\text{س}}$ = صفر

خواص الضرب القياسى

من الأمثلة السابقة يمكننا استنتاج خواص الضرب القياسى كما يلى:

١-	$\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{ب}} \cdot \overrightarrow{\text{أ}}$	خاصية الإبدال
٢-	$\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{أ}} = \|\|\overrightarrow{\text{أ}}\|\|^{٢}$	
٣-	$\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = ٠$	إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متعامدين (شرط تعامد متجهين)
٤-	$\overrightarrow{\text{أ}} \cdot (\overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{جـ}}) = \overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{جـ}}$	خاصية التوزيع
٥-	$(\text{ك}\,\overrightarrow{\text{أ}}) \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{أ}} \cdot (\text{ك}\,\overrightarrow{\text{ب}}) = \text{ك}(\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}})$	إذا كان ك عددًا حقيقيًّا

مثال

(٣) أ ب جـ ء مربع طول ضلعه ١٠سم . أوجد كلًّا من

(أ) $\overrightarrow{\text{أب}} \cdot \overrightarrow{\text{ءجـ}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{أب}} \cdot \overrightarrow{\text{بجـ}}$ (جـ) $\overrightarrow{\text{أب}} \cdot \overrightarrow{\text{جـأ}}$

الحل

(أ) ∵ $\overrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overrightarrow{\text{ءجـ}}$ متوازيان وفى نفس الاتجاه

∴ قياس الزاوية بينهما = صفر°

∴ $\overrightarrow{\text{أب}} \cdot \overrightarrow{\text{ءجـ}} = \|\|\overrightarrow{\text{أب}}\|\| \; \|\|\overrightarrow{\text{ءجـ}}\|\|$ جتا ٠°

$= ١٠ \times ١٠ \times ١ = ١٠٠$

(ب) $\overrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overrightarrow{\text{بجـ}}$ متعامدان قياس الزاوية بينهما ٩٠°

∴ $\overrightarrow{\text{أب}} \cdot \overrightarrow{\text{بجـ}} =$ صفر

(جـ) ∵ $\overrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overrightarrow{\text{جـأ}}$ لا يبدآن من نفس النقطة

∴ نمد $\overrightarrow{\text{جـأ}}$ على امتداده فتصبح قياس الزاوية بينهما ١٣٥°

$\overrightarrow{\text{أب}} \cdot \overrightarrow{\text{جـأ}} = \|\|\overrightarrow{\text{أب}}\|\| \; \|\|\overrightarrow{\text{جـأ}}\|\|$ جتا ١٣٥

$= ١٠ \times ١٠\sqrt{٢} \times \frac{-١}{\sqrt{٢}} = -١٠٠$

حل آخر الفقرة (جـ)

$\overrightarrow{\text{أب}} \cdot \overrightarrow{\text{جـأ}} = \overrightarrow{\text{أب}} \cdot (-\overrightarrow{\text{أجـ}})$

$= -\overrightarrow{\text{أب}} \cdot \overrightarrow{\text{أجـ}}$

$= -\|\|\overrightarrow{\text{أب}}\|\| \; \|\|\overrightarrow{\text{جـأ}}\|\|$ جتا ٤٥

$= -١٠ \times ١٠\sqrt{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = -١٠٠$

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

١ – فى بند حاول أن تحل ص ١٣٠:

- ساعد الطلاب فى الوصول إلى الاجابة الصحيحة

تفكير ناقد :

فى بند التفكير الناقد ص ١٣٠ :

- ناقش الطلاب فى الحالات التى يكون فيها حاصل الضرب القياسى يساوى صفر موضحًا أن ذلك يعتمد علي قيم المتغيرات وهى || $\overrightarrow{\text{أ}}$ || ، || $\overrightarrow{\text{ب}}$ || أى معيار المتجه الأول ومعيار المتجه الثانى أوجيب تمام الزاوية بينهما ، واطلب منهم توضيح العلاقة بين المتجهين إذا كانت جتا θ= صفر
- الفت انتباه الطلاب على ضرورة مراعاة اتجاه المتجهين فيجب أن يكون لهما نفس نقطة البداية أو متجهين نحو نفس النقطة ، كما أن الزاوية بين هذين المتجهين $\theta \in \{٠ ، \pi\}$ وذلك كما هو موضح فى الشكلين ص ١٣٨

- فى استعراض المثال الموضح ص ١٣٠ ذكر الطلاب بقاعدة اليد اليمنى التى تم فهمها فى الدرس السابق لتوضيح جملة (المجموع اليمنية) فى المثال .

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

٢ – فى بند حاول أن تحل ص ١٣٠:

- ذكر الطلاب بأن معيار متجه الوحدة يساوى الواحد الصحيح وساعدهم فى الوصول إلى الإجابة الصحيحة

خواص الضرب القياسى

- بعد أن يستوعب الطلاب كيفية إيجاد أو اجراء عملية الضرب القياسى بين متجهين استخدم أحد الأمثلة لشرح خواص الضرب القياسى وذلك من خلال ملاحظتهم للنتائج فى كل خاصية وهذه الخواص هى (الابدال - الضرب القياس لمتجه فى نفسه - شرط تعامد متجهين - التوزيع - الضرب في عدد حقيقي)
- ناقش مع الطلاب المثال الموضح ص ١٣١ للتدريب على ايجاد حاصل الضرب القياسى لمتجهين موضحا أن أ لمتجهين متوازيين ، ب لمتجهين متعامدين ، جـ لمتجهين بنيهما زاوية ولكن المتجهين ليسا خارجين أو داخلين من نقطة وانما هم في تتابع ولذا ناقش طريقتين الاجابة الموضحين .

التقييم المستمر (الحوار والمناقش)

٣ - فى بند حاول أن تحل ص ١٣٢ :

- ناقش مع الطلاب كيفية إيجاد حاصل الضرب القياسى لمتجهين يمثلان باضلاع مثلث متساوى الأضلاع وساعدهم في كيفية إيجاد مركبة متجه فى اتجاه متجه آخر داخل المثلث ، ولاحظ أن جـ تتطلب ضرب كل المتجه في عدد حقيقى ثم اجراء عملية الضرب القياسى بينهما

فى بند تعلم :

(الضرب القياسى لمتجهين في النظام الاحداثى المتعامد)

- ذكر الطلاب بأن أى متجه يتعرف بثلاث مركبات فى اتجاه المحاور الاحداثية المتعامدة ومتجه الوحدة الأساسى لكل منها ووضح لهم ذلك باستخدام $\overrightarrow{\text{أ}} = \text{أ}_{\text{س}}\overrightarrow{\text{س}} + \text{أ}_{\text{ص}}\overrightarrow{\text{ص}} + \text{أ}_{\text{ع}}\overrightarrow{\text{ع}}$ ، ثم اطلب منهم استخدام خواص ضرب المتجهات وبشكل خاص خاصية التوزيع لاجراء عملية الضرب القياسى .
- ساعدهم فى تذكر ناتج ضرب متجه الوحدة الأساسى فى نفسه وناتج ضرب متجهى وحدة متعامدين حتى يصلوا فى النهاية إلى أن الضرب القياسى لمتجهين ($\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}$) عبارة عن حاصل ضرب مركبة المتجه الأولى مع مركبة المتجه الاتجاه في الاتجاهات نفسها أى أن: $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = \text{أ}_{\text{س}}\text{ب}_{\text{س}} + \text{أ}_{\text{ص}}\text{ب}_{\text{ص}} + \text{أ}_{\text{ع}}\text{ب}_{\text{ع}}$
- ولتوضيح ذلك ناقشهم في المثال الموضح ص ١٣٢ واكد فى نهاية الحل أن الضرب القياسى لمتجهين هو كمية قياسية لهذا فالناتج عبارة عن عدد أو قيمة محدده.

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

٤ - فى بند حاول أن تحل ص ١٣٢

- وضح للطلاب الطرق المختلفة للتعبير عن المتجه كما هو موضح فى (أ) ووضح لهم أن (ب) عبارة عن إيجاد ناتج الضرب القياسى لمتجهين فى المستوى الإحداثى وليس فى النظام الإحداثى المتعامد .

حاول أن تحل

(٣) أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٨ سم. أوجد كلًّا من:

(أ) $\overrightarrow{\text{أب}} \cdot \overrightarrow{\text{أجـ}}$ (ب) $\overrightarrow{\text{أب}} \cdot \overrightarrow{\text{بجـ}}$ (جـ) $(٢\,\overrightarrow{\text{أب}}) \cdot (٣\overrightarrow{\text{جـب}})$

تعلم

الضرب القياسى لمتجهين فى النظام الإحداثى المتعامد

The scalar product of two vectors in orthogonal coordindte system

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_{\text{س}}\overrightarrow{\text{س}} + \text{أ}_{\text{ص}}\overrightarrow{\text{ص}} + \text{أ}_{\text{ع}}\overrightarrow{\text{ع}})$، $\text{ب} = (\text{ب}_{\text{س}}\overrightarrow{\text{س}} + \text{ب}_{\text{ص}}\overrightarrow{\text{ص}} + \text{ب}_{\text{ع}}\overrightarrow{\text{ع}})$ **فإن**

$\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = (\text{أ}_{\text{س}}\overrightarrow{\text{س}} + \text{أ}_{\text{ص}}\overrightarrow{\text{ص}} + \text{أ}_{\text{ع}}\overrightarrow{\text{ع}}) \cdot (\text{ب}_{\text{س}}\overrightarrow{\text{س}} + \text{ب}_{\text{ص}}\overrightarrow{\text{ص}} + \text{ب}_{\text{ع}}\overrightarrow{\text{ع}})$ **باستخدام خاصية التوزيع**

$= \text{أ}_{\text{س}}\text{ب}_{\text{س}}\overrightarrow{\text{س}} \cdot \overrightarrow{\text{س}} \quad \text{أ}_{\text{س}}\text{ب}_{\text{ص}} \quad \overrightarrow{\text{س}} \cdot \overrightarrow{\text{ص}} \quad \text{أ}_{\text{س}}\text{ب}_{\text{ع}} \quad \overrightarrow{\text{س}} \cdot \overrightarrow{\text{ع}}$

$+ \text{أ}_{\text{ص}}\text{ب}_{\text{س}}\overrightarrow{\text{ص}} \cdot \overrightarrow{\text{س}} \quad \text{أ}_{\text{ص}}\text{ب}_{\text{ص}} \quad \overrightarrow{\text{ص}} \cdot \overrightarrow{\text{ص}} \quad \text{أ}_{\text{ص}}\text{ب}_{\text{ع}} \quad \overrightarrow{\text{ص}} \cdot \overrightarrow{\text{ع}}$

$+ \text{أ}_{\text{ع}}\text{ب}_{\text{س}}\overrightarrow{\text{ع}} \cdot \overrightarrow{\text{س}} \quad \text{أ}_{\text{ع}}\text{ب}_{\text{ص}} \quad \overrightarrow{\text{ع}} \cdot \overrightarrow{\text{ص}} \quad \text{أ}_{\text{ع}}\text{ب}_{\text{ع}} \quad \overrightarrow{\text{ع}} \cdot \overrightarrow{\text{ع}}$

وحيث إن $\overrightarrow{\text{س}} \cdot \overrightarrow{\text{س}} = \overrightarrow{\text{ص}} \cdot \overrightarrow{\text{ص}} = \overrightarrow{\text{ع}} \cdot \overrightarrow{\text{ع}} = ١$

$\overrightarrow{\text{س}} \cdot \overrightarrow{\text{ص}} = \overrightarrow{\text{ص}} \cdot \overrightarrow{\text{ع}} = \overrightarrow{\text{ع}} \cdot \overrightarrow{\text{س}} = \text{صفر}$

$\therefore \overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = \text{أ}_{\text{س}}\text{ب}_{\text{س}} + \text{أ}_{\text{ص}}\text{ب}_{\text{ص}} + \text{أ}_{\text{ع}}\text{ب}_{\text{ع}}$

ملاحظة
إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_{\text{س}}، \text{أ}_{\text{ص}})$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (\text{ب}_{\text{س}}، \text{ب}_{\text{ص}})$ فى المستوى الإحداثى
فإن $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = \text{أ}_{\text{س}}\text{ب}_{\text{س}} + \text{أ}_{\text{ص}}\text{ب}_{\text{ص}}$

مثال

(٤) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = ٢\overrightarrow{\text{س}} + ٣\overrightarrow{\text{ص}} + ٤\overrightarrow{\text{ع}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = -\overrightarrow{\text{س}} - ٢\overrightarrow{\text{ص}} + \overrightarrow{\text{ع}}$ أوجد $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}$

الحل

$\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = (٢، ٣، ٤) \cdot (-١، -٢، ١)$

$= ٢ \times -١ + ٣ \times (-٢) + ٤ \times ١$

$= -٢ - ٦ + ٤ = -٤$

حاول أن تحل

(٤) أوجد $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}$ فى كل من الحالات الآتية:

(أ) $\overrightarrow{\text{أ}} = (-١، ٣، ٢)$، $\overrightarrow{\text{ب}} = ٤\overrightarrow{\text{س}} - ٢\overrightarrow{\text{ص}} + ٥\overrightarrow{\text{ع}}$ ماذا نستنتج؟

(ب) $\overrightarrow{\text{أ}} = ٢\overrightarrow{\text{س}} - \overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{ص}} - ٣\overrightarrow{\text{س}}$

$\overrightarrow{\text{أب}} \cdot \overrightarrow{\text{أجـ}} = ||\overrightarrow{\text{أب}}||\;||\overrightarrow{\text{أجـ}}||\ \text{جتا}\ \hat{\text{أ}}$

$= ٨ \times ٨ \times \text{جتا}\ ٦٠ = ٣٢$

$\overrightarrow{\text{أب}} \cdot \overrightarrow{\text{بجـ}} = ||\overrightarrow{\text{أب}}||\;||\overrightarrow{\text{بجـ}}||\ \text{جتا}\ (١٨٠ - ٦٠)$

$= ٨ \times ٨ \times (-\frac{٢٠}{٣}) = -٣٢$

$٢\,\overrightarrow{\text{أب}} \cdot ٣\,\overrightarrow{\text{جـب}} = ٦\,(\overrightarrow{\text{أب}} \cdot \overrightarrow{\text{جـب}})$

$= ٦\,||\overrightarrow{\text{أب}}||\;||\overrightarrow{\text{جـب}}||\ \text{جتا ب}$

$= ٦ \times ٨ \times ٨ \times \frac{١}{٢} = ١٩٢$

$\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = -٤ - ٦ + ١ = \text{صفر}$ $\qquad \overrightarrow{\text{أ}} \perp \overrightarrow{\text{ب}}$

$\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = -٦ - ١ = -٧$

تعلم

الزاوية بين متجهين

the angle between two vectors

تعلم أن $\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{ب}} = \|\overleftarrow{\text{أ}}\| \, \|\overleftarrow{\text{ب}}\|$ جتا θ

حيث θ قياس الزاوية بين المتجهين غير الصفريين $\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{ب}}$ ، $0^\circ \leqslant \theta \leqslant 180^\circ$

∴ جتا $\theta = \dfrac{\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{ب}}}{\|\overleftarrow{\text{أ}}\| \, \|\overleftarrow{\text{ب}}\|}$

حالات خاصة:

١- إذا كان جتا $\theta = 1$ فإن $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ متوازيان، وفى نفس الاتجاه.

٢- إذا كان جتا $\theta = -1$ فإن $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ متوازيان، وفى عكس الاتجاه.

٣- إذا كان جتا $\theta = 0$ فإن $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ متعامدان.

مثال

٥ أوجد قياس الزاوية بين المتجهين $\overleftarrow{\text{أ}} = ٤\overleftarrow{\text{س}} + ٣\overleftarrow{\text{ص}} + ٧\overleftarrow{\text{ع}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}} = ٢\overleftarrow{\text{س}} + ٥\overleftarrow{\text{ص}} + ٤\overleftarrow{\text{ع}}$.

الحل

$\|\overleftarrow{\text{أ}}\| = \sqrt{٤^٢ + ٣^٢ + ٧^٢} = \sqrt{٧٤}$

$\|\overleftarrow{\text{ب}}\| = \sqrt{٢^٢ + ٥^٢ + ٤^٢} = \sqrt{٤٥}$

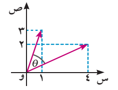
جتا $\theta = \dfrac{\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{ب}}}{\|\overleftarrow{\text{أ}}\| \, \|\overleftarrow{\text{ب}}\|}$

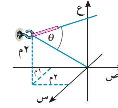
$= \dfrac{(٤ ، ٣ ، ٧) \cdot (٢ ، ٥ ، ٤)}{\sqrt{٧٤}\sqrt{٤٥}} = \dfrac{٨ + ١٥ + ٢٨}{\sqrt{٧٤}\sqrt{٤٥}} = \dfrac{٥١}{\sqrt{٧٤}\sqrt{٤٥}}$

∴ جتا$^{-١}$ $\left(\dfrac{٥١}{\sqrt{٧٤}\sqrt{٤٥}}\right)$ = جتا$^{-١}$ (٠,٨٨٣٨) = ٢٧,٩°

حاول أن تحل

٥ أوجد θ فى كل مما يأتى:





الزاوية بين متجهين

- اكتب امام الطلاب العلاقة التى توضيح حاصل الضرب القياسى لمتجهين $\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{ب}} = \|\overleftarrow{\text{أ}}\| \, \|\overleftarrow{\text{ب}}\|$ جتا هـ
- واطلب منهم محاولة صياغة تمارين مختلفة بحيث يكون المطلوب مختلف فعلى سبيل المثال يمكن أن يكون المطلوب حاصل الضرب القياسى أو أحد المتجهات أو قياس الزاوية بين هذين المتجهين مع التأكيد على أن قياس الزاوية محدد حيث $0^\circ \leqslant \theta$ ١٨٠° واستمر فى النقاش مع الطلاب وساعدهم فى اعادة كتابة العلاقة السابقة كمايلى:

$$\text{جتا}\ \theta = \frac{\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{ب}}}{\|\overleftarrow{\text{أ}}\| \, \|\overleftarrow{\text{ب}}\|}$$

- من خلال القيم المختلفة للزاوية بين المتجهين وضح لهم الحالات الخاصة لهما فإما أن يكونا متجهين متوازين أو متعامدين كما يمكن أن يكونا فى نفس الاتجاه أو عكس الاتجاه لذا علي الطلاب مراعاة الدقة فى حالة إيجاد قياس الزاوية بينهما ووصف وضعهما وفقًا لهذه القيمة .

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة):

٥ – فى بند حاول أن تحل ص ١٣٣ :

- ساعد الطلاب علي الوصول إلى الإجابة الصحيحة ودربهم على كيفية توظيف الشكل الموضح لتحديد موضع المتجهات والزاوية بينهما.

$\overleftarrow{\text{أ}} = (٤ ، ٢)$ ، $\overleftarrow{\text{ب}} = (١ ، ٣)$

$\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{ب}} = \|\overleftarrow{\text{أ}}\| \, \|\overleftarrow{\text{ب}}\|$ جتا θ

$\sqrt{٢٥} \times \sqrt{٢٥}$ جتا θ = ٤ + ٦

جتا θ == $\dfrac{١٠}{١٠\sqrt{٢}}$ = $\dfrac{١}{\sqrt{٢}}$ $\qquad$ θ = ٤٥°

فى بند تعلم

مركبة (مسقط) متجه فى اتجاه متجه آخر

- اطلب من احد الطلاب المتفوقين أن يوضح كيفية إيجاد مسقط قطعة مستقيمة علي قطعة أخرى وساعدهم في تطبيق نفس القاعدة فى حالة المتجهات .
- وضح لهم انه يمكن إيجاد مركبة متجه فى اتجاه متجه آخر بدلالة الزاوية بين هذه المتجهين أو بدلالة حاصل الضرب القياسى بينهما كما هو موضح فى العلاقة التالية :

$$\text{أ}_{\text{ب}} = \|\overleftarrow{\text{أ}}\| \text{ جتا } \theta = \frac{\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{ب}}}{\|\overleftarrow{\text{ب}}\|}$$

- واكد علي هذا المفهوم بمراجعة المثال الموضح ص ١٣٤

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

٦ - في بند حاول أن تحل ص ١٣٤ :

- ساعد الطلاب علي الوصول إلى الحل الصحيح .

تفكير ناقد :

- في بند تفكير ناقد ، ساعد الطلاب علي الربط بين المفاهيم والعلاقات التي سبق وتعلمها في هذا الدرس حتى يمكنه تحديد الحالات التي تنعدم فيها مركبة متجه في اتجاه متجه آخر ، وفي حالة وجود صعوبة لدى البعض استخدم مفهوم المسقط وعلاقته بمركبة المتجه ، كذلك قياس الزاوية بين المتجهين

تعلم :

- استخدام الضرب القياسى لايجاد الشغل المبذول من قوة.
- اطلب من الطلاب توظيف ما تم تعلمه فى مادة الفيزياء لتعريف مفهوم الشغل وساعدهم في الوصول أن الشغل هو حاصل الضرب القياسى بين القوة المؤثرة علي جسم وادت إلى تحريكه ازاحة محددة.
- ووضح لهم أن الشغل هو أحد التطبيقات الحياتية لمفهوم الضرب القياسى لمتجهين.

تعلم

مركبة (مسقط) متجه فى اتجاه متجه آخر.

إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ متجهين، فإن مركبة المتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ فى اتجاه $\overleftarrow{\text{ب}}$ (ويرمز لها $\text{أ}_{\text{ب}}$) هى

$$\text{أ}_{\text{ب}} = \|\overleftarrow{\text{أ}}\| \text{ جتا } \theta = \frac{\overleftarrow{\text{أ}} \cdot \overleftarrow{\text{ب}}}{\|\overleftarrow{\text{ب}}\|}$$

مثال

٦ أوجد مركبة القوة $\overleftarrow{\text{ق}} = ٢\overleftarrow{\text{س}} - ٣\overleftarrow{\text{ص}} + ٥\overleftarrow{\text{ع}}$ فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أب}}$ حيث أ(١، ٤، ٠)، ب(-١، ٢، ٣)

الحل

$\overleftarrow{\text{أب}} = \overleftarrow{\text{ب}} - \overleftarrow{\text{أ}}$

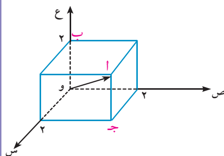
$= (-١، ٢، ٣) - (١، ٤، ٠) = (-٢، -٢، ٣)$

مركبة القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أب}} = \dfrac{\overleftarrow{\text{ق}} \cdot \overleftarrow{\text{أب}}}{\|\overleftarrow{\text{أب}}\|}$

$= \dfrac{(٢، -٣، ٥) \cdot (-٢، -٢، ٣)}{\sqrt{(-٢)^٢ + (-٢)^٢ + ٣^٢}} = \dfrac{١٧}{\sqrt{١٧}} = \sqrt{١٧}$

حاول أن تحل

٦ الشكل المقابل يمثل مكعبًا طول ضلعه ٢ وحدة طول أوجد مسقط المتجه $\overleftarrow{\text{وأ}}$ على المتجه $\overleftarrow{\text{جـب}}$



تفكير ناقد: متى تنعدم مركبة متجه فى اتجاه قيمة آخر؟

تعلم

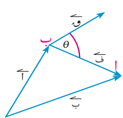
استخدام الضرب القياسى لإيجاد الشغل المبذول من قوة

Using scalar product to find the work done by aforce

إذا كانت القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ المؤثرة على جسم حرَّكته إزاحة $\overleftarrow{\text{ف}}$ فإننا نقول: إن القوة قد بذلت شغلًا.

ويمكن إيجاد هذا الشغل باستخدام العلاقة:

$$\text{شـ} = \overleftarrow{\text{ق}} \cdot \overleftarrow{\text{ف}} = \|\overleftarrow{\text{ق}}\| \, \|\overleftarrow{\text{ف}}\| \text{ جتا } \theta$$



وحدة قياس الشغل هى وحدة قياس القوة × وحدة قياس الإزاحة.

حاول أن تحل (٦)

مسقط $\overleftarrow{\text{وأ}}$ على المتجه $\overleftarrow{\text{وب}} = ٢\sqrt{٢}$

مثال

(٧) أثرت قوة $\overrightarrow{\text{ق}} = \overrightarrow{\text{س}} - ٢\overrightarrow{\text{ص}} + ٣\overrightarrow{\text{ع}}$ نيوتن فى جسم فحركته من نقطة أ (-٣، ١، ٠) إلى نقطة ب(٢، ٠، -٢). أوجد الشغل المبذول من القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ حيث الإزاحة مقدرة بالمتر.

أضف إلى معلوماتك

إذا كانت وحدة قياس القوة هى النيوتن، ووحدة قياس الإزاحة هى المتر، فإن وحدة قياس الشغل هى الجول.

الحل

$\overrightarrow{\text{ف}} = \overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}}$

= (٢، ٠، -٢) - (-٣، ١، ٠)

= (٥، -١، -٢)

ش = $\overrightarrow{\text{ق}} \cdot \overrightarrow{\text{ف}}$

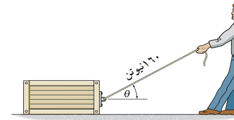
= (١، -٢، ٣) • (٥، -١، -٢) = ١ جول

حاول أن تحل

(٧) يتحرك جسيم تحت تأثير القوة $\overrightarrow{\text{ق}} = -٦\overrightarrow{\text{س}} + ٨\overrightarrow{\text{ص}}$ من النقطة أ (-١، ٣) إلى النقطة ب (٤، ٧). أوجد الشغل المبذول من القوة.

مثال

(٨) **فى الشكل المقابل:** شخص يسحب صندوقًا بقوة شد مقدارها ١٦٠ نيوتن، وتميل على الأفقى بزاوية ظل قياسها $\frac{٣}{٤}$ ليحركه مسافة أفقية قدرها ٥ أمتار. أوجد الشغل المبذول من قوة الشد.



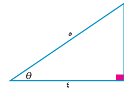
الحل

الشغل = $\overrightarrow{\text{ق}} \cdot \overrightarrow{\text{ف}}$

= $\|\overrightarrow{\text{ق}}\| \, \|\overrightarrow{\text{ف}}\|$ جتا θ

= ١٦٠ × ٥ × $\frac{٤}{٥}$

= ٦٤٠ جول



حاول أن تحل

(٨) **فى الشكل المقابل:** شخص يرفع صندوقًا بواسطة خيط يمر على بكرة ملساء، ويميل على الرأس بزاوية قياسها ٣٠. فإذا كانت قوة الشد فى الخيط ١٢٠ نيوتن ليرتفع الصندوق عن سطح الأرض مسافة ٣ أمتار، فأوجد الشغل المبذول من قوة الشد فى الخيط.

- ناقش مع المتعلمين وحدة قياس النقل موضحًا أنها تعتمد على وحدة قياس القوة وموحدة قياس الأزاحة، من خلال ما ثم دراسته فى مادة الفيزياء ايضًا وضح لهم أن وحدة قياس القوة هى النيوتن ووحدة قياس الشغل هى الجول.
- ناقش مع الطلاب المثال الموضح ص١٣٥ وساعدهم فى كيفية إيجاد الأزاحة الناتجة للجسم نتيجة تحركة من نقطة إلى أخرى مع تطبيق قاعدة المتجهات والفت انتباهم إلى أن $\overrightarrow{\text{أب}} \neq \overrightarrow{\text{ب أ}}$ وأنما $\overrightarrow{\text{أب}} = -\overrightarrow{\text{ب أ}}$

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

- ٧ـ فى بند حاول أن تحل ص١٣٥ ساعدهم فى الوصول إلى الإجابة الصحيحة حيث أنه يشبه إلى حد كبير المثال السابق
- ناقش مع الطلاب المثال الموضح ص١٣٥ والخاص بقيام شخص بسحب صندوق بوقة محددة ووضح لهم أن هذا المثال هو تطبيق حياتى آخر على الضرب القياس بين متجهين الذين يعبران عن قوة الشد والازاحة الناتجة عنه.
- ذكر الطلاب بكيفية الحصول على النسبة المثلثية الخاصة بجيب التمام.

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

٨ـ فى بند حاول أن تحل ص١٣٥ :

- ناقش مع الطلاب اوجه الشبة أو الاختلاف بينه وبين المثال السابق له وساعدهم فى تحديد المطلوب وكيفية حساب الشغل المبذول فى هذه الحالة.

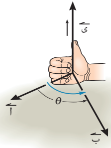
ش = $\overrightarrow{\text{ق}} \cdot \overrightarrow{\text{ف}}$

ش = $\|\overrightarrow{\text{ق}}\| \, \|\overrightarrow{\text{ف}}\|$ جتا θ

ش = ١٢٠ × ٣ × جتا ٣٠ = $١٨٠\sqrt{٣}$ جول

تعلم

الضرب الاتجاهى لمتجهين *Vector product of two vectors (cross product)*

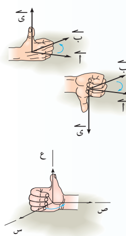


إذا كان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهين فى مستوى، يحصران بينهما زاوية قياسها θ وكان $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة عموديًّا على المستوى الذى يحوى $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ **فإن** حاصل الضرب الاتجاهى للمتجهين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ يُعطى بالعلاقة

$$\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = (\|\overrightarrow{أ}\| \, \|\overrightarrow{ب}\| \text{ جا } \theta) \, \overrightarrow{ى}$$

ويتحدد اتجاه متجه الوحدة $\overrightarrow{ى}$ (لأعلى أم أسفل) طبقًا لقاعدة اليد اليمنى، حيث تشير الأصابع المنحنية لليد اليمنى إلى اتجاه الدوران من المتجه $\overrightarrow{أ}$ إلى المتجه $\overrightarrow{ب}$ فيشير الإبهام إلى اتجاه المتجه $\overrightarrow{ى}$

ملحوظات هامة



١- **إذا كان** $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}$ فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{ى}$ فإن $\overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{أ}$ تكون فى اتجاه المتجه $-\overrightarrow{ى}$ **أى أن** $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = -\overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{أ}$

٢- بتطبيق قاعدة اليد اليمنى على مجموعة يمينية من متجهات الوحدة **فإن**

$\overrightarrow{س} \times \overrightarrow{ص} = \overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ص} \times \overrightarrow{ع} = \overrightarrow{س}$

$\overrightarrow{ع} \times \overrightarrow{س} = \overrightarrow{ص}$

$\overrightarrow{س} \times \overrightarrow{ع} = -\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ع} \times \overrightarrow{ص} = -\overrightarrow{س}$

$\overrightarrow{ص} \times \overrightarrow{س} = -\overrightarrow{ع}$

٣- لأى متجه $\overrightarrow{أ}$ يكون $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{و}$ حيث $\overrightarrow{و}$ المتجه الصفرى

مثال

(٩) $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهان فى مستوى، قياس الزاوية بينهما ٧٠° فإذا كان $\|\overrightarrow{أ}\| = ١٠$ $\|\overrightarrow{ب}\| = ١٧,٥$ أوجد معيار $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}$

الحل

$\because \overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \|\overrightarrow{أ}\| \, \|\overrightarrow{ب}\| \text{ جا } \theta \, \overrightarrow{ى}$

$\because \|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}\| = \|\overrightarrow{أ}\| \, \|\overrightarrow{ب}\| \text{ جا } \theta = ١٥ \times ١٧,٥ \times \text{ جا } ٧٠ = ٢٤٦,٦٧$

تعلم الضرب الاتجاهى لمتجهين

- ذكر الطلاب بأن هناك طريقين لإيجاد حاصل ضرب متجهين وأنه تم دراسة الضرب القياس لمتجهين وأنه الطريقة الأخرى يطلق عليها الضرب الاتجاهى لمتجهين.
- من خلال المقارنة بين الطريفين ساعد الطلاب فى اكتشاف أنه ناتج الضرب الاتجاهى لمتجهين هو كمية متجهه و يتحدد اتجاهها بمتجه الوحدة العمودى على المستوى الذى يحوى هذين المتجهين وليستوعب الطلاب هذا المفهوم ذكرهم بقاعدة اليد اليمنى حتى يمكنهم تخيل المستوى الذى يحوى المتجهين وكذلك المتجه العمودى على هذا المستوى. نؤكدًا على ضرورة استخدام اليد اليمنى وعلى أن الابهام يشير إلى الاتجاه العمودى على المستوى.
- وضح للطلاب الملاحظات الموضحة والفت انتباههم انه نتيجة لاختلاف اتجاه المتجهين فقد يختلف اتجاه المتجه العمودى وبأنه بيذكر خواص العمليات على المتجهات يمكن التحقق من أن الضرب الاتجاهى لمتجهين عملية غير ابدالية حيث $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = -\overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{أ}$ أى أنه الاتجاه اختلف فى الحالتين.
- وذكرهم بأن حاصل ضرب متجهى الوحدة الأساسية لأى مستوى يساوى متجه الوحدة الاساسى العمودى على هذا المستوى أى أن $\overrightarrow{س} \times \overrightarrow{ص} = \overrightarrow{ع}$ وهكذا.
- ذكر الطلاب بأن الضرب الاتجاهى لمتجه فى نفس هو المتجه الصغرى واطلب منهم محاولة تفسير السبب وساعدهم حتى يكتشفوا أن الزاوية فى هذه الحالة تساوى الصفر.
- الفت انتباه الطلاب إلى طريقة كتابة كل من الضرب القياس لمتجهين ($\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}$)
- من خلال المثال الموضح الفت انتباههم إلى أن هو معيار الضرب الاتجاهى لمتجهين.

حاول أن تحل

٩ إذا كان $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = -٦٥\ \overleftarrow{ى}$ وكان $\|\overleftarrow{أ}\| = ٥$ ، $\|\overleftarrow{ب}\| = ٢٦$ أوجد قياس الزاوية بين المتجهين $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$

الضرب الاتجاهى فى الإحداثيات الكارتيزية

إذا كان $\overleftarrow{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$ ، $\overleftarrow{ب} = (ب_س ، ب_ص ، ب_ع)$ متجهين **فإن**

$$\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = (أ_س \overleftarrow{س} + أ_ص \overleftarrow{ص} + أ_ع \overleftarrow{ع}) \times (ب_س \overleftarrow{س} + ب_ص \overleftarrow{ص} + ب_ع \overleftarrow{ع})$$

$$= أ_س ب_س \overleftarrow{س} \times \overleftarrow{س} + أ_س ب_ص \overleftarrow{س} \times \overleftarrow{ص} + أ_س ب_ع \overleftarrow{س} \times \overleftarrow{ع}$$

$$+ أ_ص ب_س \overleftarrow{ص} \times \overleftarrow{س} + أ_ص ب_ص \overleftarrow{ص} \times \overleftarrow{ص} + أ_ص ب_ع \overleftarrow{ص} \times \overleftarrow{ع}$$

$$+ أ_ع ب_س \overleftarrow{ع} \times \overleftarrow{س} + أ_ع ب_ص \overleftarrow{ع} \times \overleftarrow{ص} + أ_ع ب_ع \overleftarrow{ع} \times \overleftarrow{ع}$$

وحيث إن $\overleftarrow{س} \times \overleftarrow{س} = \overleftarrow{ص} \times \overleftarrow{ص} = \overleftarrow{ع} \times \overleftarrow{ع} = \overleftarrow{و}$

$\overleftarrow{س} \times \overleftarrow{ص} = \overleftarrow{ع}$ ، $\overleftarrow{ص} \times \overleftarrow{ع} = \overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ع} \times \overleftarrow{س} = \overleftarrow{ص}$ فإن

$$\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = ٠ + أ_س ب_ص \overleftarrow{ع} + أ_س ب_ع (-\overleftarrow{ص})$$

$$+ أ_ص ب_س (-\overleftarrow{ع}) + ٠ + أ_ص ب_ع (\overleftarrow{س})$$

$$+ أ_ع ب_س (\overleftarrow{ص}) + أ_ع ب_ص (-\overleftarrow{س}) + ٠$$

$$= (أ_ص ب_ع - أ_ع ب_ص) \overleftarrow{س} + (أ_ع ب_س - أ_س ب_ع) \overleftarrow{ص}$$

$$+ (أ_س ب_ص - أ_ص ب_س) \overleftarrow{ع}$$

والصورة الأخيرة يمكن كتابتها على شكل محدد على النظم ٣ × ٣ كالآتى:

$$\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = \begin{vmatrix} \overleftarrow{س} & \overleftarrow{ص} & \overleftarrow{ع} \\ أ_س & أ_ص & أ_ع \\ ب_س & ب_ص & ب_ع \end{vmatrix}$$

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

٩.فى بند حاول أن تحل ص١٣٧

- اطلب من الطلاب قراءته جيدًا وتوضيح المطلوب، وساعدهم فى ملاحظة أنه لايجاد قياس الزاوية بين المتجهين فلابد من استخدام معيار $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}$

الضرب الاتجاهى فى الاحداثيات الكارتيزية

- وضح للطلاب كيفية إيجاد حاصل الضرب الاتجاهى لمتجهين وذلك باستخدام خاصية التوزيع لعملية الضرب، وما تم تعلمه من العلاقة بين متجهات الوحدة لتبسيط عملية الضرب كما هو موضح ص١٣٧
- بعد الوصول إلى الناتج الأخير للضرب الاتجاهى للمتجهين. اكتب على السبورة أحد المحددات ولكن باستخدام رموز وليست اعداد ويمكن أن تذكرهم بمفهوم المحدد وكيفية إيجاد قيمة المحدد فمثلًا:

$$\begin{vmatrix} أ & ب \\ ء & جـ \end{vmatrix} = أء - ب\,جـ$$

$$\begin{vmatrix} س & ص & ع \\ أ & ب & جـ \\ هـ & ل & م \end{vmatrix} = س\,(ب\,م - ل\,جـ) - ص\,(أ\,م - هـ\,جـ) + ع\,(أ\,ل - هـ\,ب)$$

- مع التأكيد على قاعدة الاشارات عند إيجاد قيمة المحدد
- اطلب من طلابك ملاحظة المحدد المعطى كمثال وساعدهم فى إعادة صياغة ناتج الضرب الاتجاهى لمتجهين باستخدام مفهوم المحددات، وفى حالة وجود صعوبة اسألهم عن عناصر الصف الأول فى المحدد المطلوب، واستمر فى عرض الأسئلة إلى تساعد الإجابة عليها فى توجيه تفكيرهم والوصول إلى المحدد المطلوب.
- ناقش مع الطلاب الحد الثانى فى حاصل الضرب الاتجاهى وعلاقته بقاعدة الاشارات $(أ_ع ب_س - أ_س ب_ع)\ \overleftarrow{ص}$

$$\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = -٦٥\ \overleftarrow{ى}$$

$$\|\overleftarrow{أ}\|\ \|\overleftarrow{ب}\| \times جا\,هـ = -٦٥$$

$$٥ \times ٢٦\ جا\,هـ = -٦٥$$

$$جا\,هـ = -\frac{١}{٢}$$

$$\therefore\ ق\,(\hat{هـ}) = ١٥٠$$

- بعد استيعاب الطلاب لكيفية إيجاد ناتج الضرب الاتجاهى لمتجهين فى النظام الثلاثى الابعاد باستخدام المحددات، وجه لهم سؤال عن شكل هذا المحدد إذا كانت المتجهات فى المستوى الاحداثى س، ص فما هى القيم التى ستتغير وساعدهم فى استيعاب الحالة الخاصة الموضحة فى ١٣٨، مفسرًا لهم أن المحور ع هو المتجه العمودى على المستوى الاحداثى.
- ناقش مع الطلاب المثال الموضح ص١٣٨ والذى يوضح كيفية استخدام المحدد لإيجاد الضرب الاتجاهى لمتجهين فى المستوى الاحداثى ثلاثى الابعاد.
- ووضح لهم كيفية إيجاد متجه الوحدة العمودى على المستوى.

الوحدة الأولى: الهندسة والقياس فى بعدين وثلاثة أبعاد

حالة خاصة

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_{\text{س}} ، \text{أ}_{\text{ص}})$، $\overrightarrow{\text{ب}} = (\text{ب}_{\text{س}} ، \text{ب}_{\text{ص}})$ فى المستوى الإحداثى س ص **فإن**

$$\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ \text{أ}_{\text{س}} & \text{أ}_{\text{ص}} & ٠ \\ \text{ب}_{\text{س}} & \text{ب}_{\text{ص}} & ٠ \end{vmatrix} = (\text{أ}_{\text{س}}\text{ب}_{\text{ص}} - \text{أ}_{\text{ص}}\text{ب}_{\text{س}}) \overrightarrow{\text{ع}}$$

مثال

١٠ إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (-٢ ، ٣ ، ١)$، $\overrightarrow{\text{ب}} = (١ ، ٢ ، ٤)$ أوجد $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}$ ثم استنتج متجه الوحدة العمودى على المستوى الذى يحوى المتجهين $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$

الحل

$$\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ -٢ & ٣ & ١ \\ ١ & ٢ & ٤ \end{vmatrix}$$

$$= (٣ \times ٤ - ٢ \times ١) \overrightarrow{\text{س}} - (-٢ \times ٤ - ١ \times ١) \overrightarrow{\text{ص}} + (-٢ \times ٢ - ٣ \times ١) \overrightarrow{\text{ع}}$$

$$= ١٠ \overrightarrow{\text{س}} + ٩ \overrightarrow{\text{ص}} - ٧ \overrightarrow{\text{ع}}$$

متجه الوحدة العمودى على مستوى $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ $= \dfrac{\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}}{\| \overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} \|}$

$$\therefore \overrightarrow{\text{ى}} = \frac{١٠ \overrightarrow{\text{س}} + ٩ \overrightarrow{\text{ص}} - ٧ \overrightarrow{\text{ع}}}{\sqrt{١٠^٢ + ٩^٢ + (-٧)^٢}} = \frac{١٠}{\sqrt{٢٣٠}} \overrightarrow{\text{س}} + \frac{٩}{\sqrt{٢٣٠}} \overrightarrow{\text{ص}} - \frac{٧}{\sqrt{٢٣٠}} \overrightarrow{\text{ع}}$$

حاول أن تحل

١٠ إذا كان $\| \overrightarrow{\text{أ}} \| = ٦$ وكانت جيوب تمام زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ هى على الترتيب $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{-٢}{٣}$ ، $\frac{١}{٣}$ وكان المتجه $\overrightarrow{\text{ب}} = (-٢ ، ٣ ، ٥)$ أوجد $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}$

خواص حاصل الضرب الاتجاهى لمتجهين

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متجهين، قياس الزاوية بينهما θ فإن:

١- $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = -\overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{أ}}$ (الضرب الاتجاهى عملية غير إبدالية)

٢- $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{و}}$

١٣٨ الصف الثالث الثانوى - كتاب الطالب

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

١٠ فى بند حاول أن تحل ص١٣٨:

- ناقش الطلاب فى التمرين واطلب منهم تحديد المعطيات المتاحة وكيفية توظيفها لإيجاد المطلوب

$\overrightarrow{\text{أ}} = (٤ ، -٤ ، ٢)$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (-٢ ، ٣ ، ٥)$

$$\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ ٤ & -٤ & ٢ \\ -٢ & ٣ & ٥ \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = -٢٦ \overrightarrow{\text{س}} - ٢٤ \overrightarrow{\text{ص}} + ٤ \overrightarrow{\text{ع}}$$

خواص حاصل الضرب الاتجاهى لمتجهين

- حتى يتمكن الطلاب من إجراء عملية الضرب الاتجاهى بشكل صحيح منهم فى حاجة إلى معرفة خواص عملية الضرب حيث نجد أن الضرب الاتجاهى عملية غير ابدالية، وأن الضرب الاتجاهى لمتجه مع نفسه ينتج عنه المتجه الصغرى.

ضرب المتجهات | ١ - ٣

٣- إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{و}}$ فإما $\overrightarrow{\text{أ}} \,//\, \overrightarrow{\text{ب}}$ أو أحد المتجهين أو كلاهما يساوى $\overrightarrow{\text{و}}$

٤- $\overrightarrow{\text{أ}} \times (\overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{جـ}}) = (\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}) + (\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{جـ}})$ خاصية التوزيع

٥- $(\text{ك}\,\overrightarrow{\text{أ}}) \times \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{أ}} \times (\text{ك}\,\overrightarrow{\text{ب}}) = \text{ك}(\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}})$ حيث ك عدد حقيقى

توازى متجهين

رأينا فى خواص الضرب الاتجاهى أن المتجهين $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ يكونان متوازيين إذا وفقط إذا كان: $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{و}}$

أى $(\text{أ}_{\text{ص}}\text{ب}_{\text{ع}} - \text{أ}_{\text{ع}}\text{ب}_{\text{ص}})\overrightarrow{\text{س}} + (\text{أ}_{\text{ع}}\text{ب}_{\text{س}} - \text{أ}_{\text{س}}\text{ب}_{\text{ع}})\overrightarrow{\text{ص}} + (\text{أ}_{\text{س}}\text{ب}_{\text{ص}} - \text{أ}_{\text{ص}}\text{ب}_{\text{س}})\overrightarrow{\text{ع}} = \overrightarrow{\text{و}}$

أى $\text{أ}_{\text{ص}}\text{ب}_{\text{ع}} = \text{أ}_{\text{ع}}\text{ب}_{\text{ص}}$ ، $\text{أ}_{\text{س}}\text{ب}_{\text{ع}} = \text{أ}_{\text{ع}}\text{ب}_{\text{س}}$ ، $\text{أ}_{\text{س}}\text{ب}_{\text{ص}} = \text{أ}_{\text{ص}}\text{ب}_{\text{س}}$

أى $\frac{\text{أ}_{\text{ص}}}{\text{ب}_{\text{ص}}} = \frac{\text{أ}_{\text{ع}}}{\text{ب}_{\text{ع}}}$ ، $\frac{\text{أ}_{\text{س}}}{\text{ب}_{\text{س}}} = \frac{\text{أ}_{\text{ع}}}{\text{ب}_{\text{ع}}}$ ، $\frac{\text{أ}_{\text{س}}}{\text{ب}_{\text{س}}} = \frac{\text{أ}_{\text{ص}}}{\text{ب}_{\text{ص}}}$

أى $\frac{\text{أ}_{\text{س}}}{\text{ب}_{\text{س}}} = \frac{\text{أ}_{\text{ص}}}{\text{ب}_{\text{ص}}} = \frac{\text{أ}_{\text{ع}}}{\text{ب}_{\text{ع}}}$

وبفرض أى من النسب = ك يكون

$\text{أ}_{\text{س}} = \text{ك}\,\text{ب}_{\text{س}}$ ، $\text{أ}_{\text{ص}} = \text{ك}\,\text{ب}_{\text{ص}}$ ، $\text{أ}_{\text{ع}} = \text{ك}\,\text{ب}_{\text{ع}}$

$\therefore \overrightarrow{\text{أ}} = \text{أ}_{\text{س}}\overrightarrow{\text{س}} + \text{أ}_{\text{ص}}\overrightarrow{\text{ص}} + \text{أ}_{\text{ع}}\overrightarrow{\text{ع}}$

$\therefore \overrightarrow{\text{أ}} = \text{ك}\,\overrightarrow{\text{ب}}$

عندما تكون ك > ٠ يكون المتجهان متوازيين وفى نفس الاتجاه، وعندما تكون ك < ٠ يكون المتجهان متوازيين وفى عكس الاتجاه.

مثال

(١١) إذا كان المتجه $\overrightarrow{\text{أ}} = (٢\overrightarrow{\text{س}} - ٣\overrightarrow{\text{ص}} + \text{م}\,\overrightarrow{\text{ع}})$ يوازى المتجه $\overrightarrow{\text{ب}} = (\overrightarrow{\text{س}} + \text{ك}\,\overrightarrow{\text{ص}} + ٨\,\overrightarrow{\text{ع}})$
أوجد قيمة كل من م، ك

الحل

$\because \overrightarrow{\text{أ}} \,//\, \overrightarrow{\text{ب}}$ $\therefore \frac{\text{أ}_{\text{س}}}{\text{ب}_{\text{س}}} = \frac{\text{أ}_{\text{ص}}}{\text{ب}_{\text{ص}}} = \frac{\text{أ}_{\text{ع}}}{\text{ب}_{\text{ع}}}$

$\therefore \frac{٢}{١} = \frac{-٣}{\text{ك}} = \frac{\text{م}}{٨}$ $\therefore \text{ك} = \frac{١ \times -٣}{٢} = \frac{-٣}{٢}$ ، $\text{م} = \frac{٢ \times ٨}{١} = ١٦$

حاول أن تحل

(١١) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (٢، -٣)$ وكان $\overrightarrow{\text{ب}} \,//\, \overrightarrow{\text{أ}}$ فإذا كان $\|\overrightarrow{\text{ب}}\| = ٣\sqrt{١٣}$ أوجد $\overrightarrow{\text{ب}}$.

كتاب الجبر والهندسة الفراغية - الهندسة الفراغية ١٣٩

- ناقش مع الطلاب خاصية التوزيع وضرب حاصل الضرب الاتجاهى فى عدد حقيقى ثم ركز على الخاصية التى توضح متى يكون المتجهين متوازين.
- فإذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{و}}$ فهذا يعنى أحد الاحتمالات التالية أن أحد المتجهين هو المتجه الصغرى أو أن الزاوية بين المتجهين تساوى صفر أى أنهما متوازين.

توازى متجهين

- لتوضيح اتجاه متجه حاصل الضرب الاتجاهى لمتجهين فلابد من توظيف خواص عملية الضرب الاتجاهى حتى يكتشف الطلاب هل المتجهين لهما نفس الاتجاه أم أنهما فى اتجاهان متعاكسان من خلال استخدام علاقات التناسب وضح للطلاب أن العلاقة التالية توضح العلاقة بين المتجهان المتوازيان
- $\overrightarrow{\text{أ}} = \text{ك}\,\overrightarrow{\text{ب}}$ حيث ك قيمة ثابتة يتوقف على قيمتها تحديد اتجاه المستقيمان فإذا كان ك > ٠ فهذا يعنى أن المتجهان لهما نفس الاتجاه أما إذا كان ك < ٠ فهذا يعنى أن المتجهان متوازيان ولكن فى عكس الاتجاه.

مثال:

- وضح للطلاب أنه يمكن الاستفاده من العلاقة بين المستقيمان المتوازيان فى إيجاد الاحداثيات المجهولة لأحد المتجهات، كما هو الحال فى المثال الموضح ص١٣٩

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

١١. فى بند حاول أن تحل ص١٣٩:

- ساعد الطلاب فى الوصول إلى الإجابة الصحيحة التالية

$\overrightarrow{\text{ب}} = \text{ك}\,\overrightarrow{\text{أ}}$

$\|\overrightarrow{\text{ب}}\| = |\text{ك}|\,\|\overrightarrow{\text{أ}}\|$

$٣\sqrt{١٣} = |\text{ك}|\,\sqrt{١٣}$

$\text{ك} = \pm ٣$

$\overrightarrow{\text{ب}} = (٦، -٩)$

$\overrightarrow{\text{ب}} = (-٦، ٩)$

المعنى الهندسى للضرب الاتجاهى لمتجهين

- راجع مع الطلاب الصور المختلفة لحاصل الضرب الاتجاهى لمتجهين وذلك من خلال الشكل الموضح فى ص١٤٠ والتى تعبر عن الضرب الاتجاهى لمتجهين يمثلان بضلعين فى متوازى اضلاع، ومن خلال مفهوم مساحة متوازى الأضلاع يمكن للطلاب اكتشاف أن معيار الضرب الاتجاهى لمتجهين يساوى مساحة متوازى الاضلاع الذى فيه ضلعان متجاوران يمثلان هذين المتجهين أو ضعف مساحة مثلث فيه هذين الضلعين.
- ومن خلال المثال الموضح ص١٤٠ أكد على الطلاب ضرورة التركيز فى التعبير عن المتجهات فى محدد وإيجاد متجه حاصل الضرب الاتجاهى بينها حتى يمكن إيجاد معيار الضرب الاتجاهى الذى يساوى مساحة متوازى الاضلاع المطلوبة.

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

١٢.فى بند حاول أن تحل ص١٤٨ :

- ساعد الطلاب فى إيجاد مساحة المثلث كما موضح فى الخطوات التالية

$$\text{مساحة } \triangle = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} \right\|$$

$$\text{مساحة } \triangle = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ 1 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\text{مساحة } \triangle = \frac{1}{2} \left(1(-2+20) - 2(-1) + 5 \right)$$

$$= \frac{1}{2} (18 + 2 + 5) = 22{,}5 \text{ وحدة مساحة}$$

فى بند تعلم: الضرب الثلاثى القياسى

- وضح للطلاب أنه تم التعرف على كيفية إيجاد حاصل ضرب متجهين قياسيًا أو اتجاهيًا، وفى هذا الجزء سيتعرف على مفهوم جديد وهى الضرب الثلاثى القياسى الذى يربط بين حاصل الضرب القياسى والضرب الاتجاهى.

المعنى الهندسى للضرب الاتجاهى لمتجهين

نعلم أن $\|\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}\| = \|\overrightarrow{\text{أ}}\| \, \|\overrightarrow{\text{ب}}\| \text{ جا } \theta$

$= \|\overrightarrow{\text{ب}}\| \times \text{ل}$ حيث $\text{ل} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\| \text{ جا } \theta$

= مساحة متوازى الأضلاع الذى فيه $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{أ}}$ ضلعان متجاوران

= ضعف مساحة المثلث الذى فيه $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{أ}}$ ضلعان.

$\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\|\overrightarrow{\text{أ}}\| \text{ جا } \theta$ ، θ ، و ، $\overrightarrow{\text{ب}}$

مثال

(١٢) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (-3 ، 1 ، 2)$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (3 ، 4 ، -1)$ أوجد مساحة متوازى الأضلاع الذى فيه $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ضلعان متجاوران.

الحل

$\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = (-3 ، 1 ، 2) \times (3 ، 4 ، -1)$

$$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ -3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = (-9)\overrightarrow{\text{س}} + 3\overrightarrow{\text{ص}} - 15\overrightarrow{\text{ع}}$$

$\|\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}\| = \sqrt{(-9)^2 + (3)^2 + (-15)^2} = 3\sqrt{35}$

∴ مساحة متوازى الضلاع = $3\sqrt{35}$ وحدة مساحة.

حاول أن تحل

(١٢) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (1 ، 2 ، -4)$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (0 ، 5 ، -1)$ أوجد مساحة المثلث الذى فيه $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ضلعان.

تعلم

الضرب الثلاثى القياسى *Scalar triple product*

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ متجهات فإن المقدار $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{جـ}}$ يعرف بحاصل الضرب الثلاثى القياسى. الذى له كثير من التمثيلات فى مجال الاستاتيكا (لاحظ عدم وجود أقواس حيث لا معنى لإجراء الضرب القياسى أولًا)

وبفرض $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_{\text{س}} ، \text{أ}_{\text{ص}} ، \text{أ}_{\text{ع}})$، $\overrightarrow{\text{ب}} = (\text{ب}_{\text{س}} ، \text{ب}_{\text{ص}} ، \text{ب}_{\text{ع}})$ ، $\overrightarrow{\text{جـ}} = (\text{جـ}_{\text{س}} ، \text{جـ}_{\text{ص}} ، \text{جـ}_{\text{ع}})$

فإن $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{جـ}}$

$$= (\text{أ}_{\text{س}}\overrightarrow{\text{س}} + \text{أ}_{\text{ص}}\overrightarrow{\text{ص}} + \text{أ}_{\text{ع}}\overrightarrow{\text{ع}}) \cdot \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ \text{ب}_{\text{س}} & \text{ب}_{\text{ص}} & \text{ب}_{\text{ع}} \\ \text{جـ}_{\text{س}} & \text{جـ}_{\text{ص}} & \text{جـ}_{\text{ع}} \end{vmatrix}$$

$= (\text{أ}_س \overrightarrow{س} + \text{أ}_ص \overrightarrow{ص} + \text{أ}_ع \overrightarrow{ع}) \cdot [(\text{ب}_ص \text{جـ}_ع - \text{ب}_ع \text{جـ}_ص)\overrightarrow{س} - (\text{ب}_س \text{جـ}_ع - \text{ب}_ع \text{جـ}_س)\overrightarrow{ص}$

$+ (\text{ب}_س \text{جـ}_ص - \text{ب}_ص \text{جـ}_س)\overrightarrow{ع}]$

$\text{أ}_س(\text{ب}_ص \text{جـ}_ع - \text{ب}_ع \text{جـ}_ص) - \text{أ}_ص(\text{ب}_س \text{جـ}_ع - \text{ب}_ع \text{جـ}_س) + \text{أ}_ع(\text{ب}_س \text{جـ}_ص - \text{ب}_ص \text{جـ}_س)$

$$= \begin{vmatrix} \text{أ}_س & \text{أ}_ص & \text{أ}_ع \\ \text{ب}_س & \text{ب}_ص & \text{ب}_ع \\ \text{جـ}_س & \text{جـ}_ص & \text{جـ}_ع \end{vmatrix}$$

خواص الضرب الثلاثى القياس

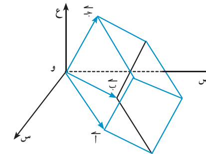
١- الضرب الثلاثى القياس قيمته لا تتغير إذا كانت ترتيب المتجهات فى ترتيب دورى واحد.

$\overrightarrow{\text{أ}} \cdot (\overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{جـ}}) = \overrightarrow{\text{ب}} \cdot (\overrightarrow{\text{جـ}} \times \overrightarrow{\text{أ}}) = \overrightarrow{\text{جـ}} \cdot (\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}})$ **لاحظ الترتيب الدورى** $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$

٢- إذا كانت المتجهات $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ فى مستوى واحد فإن حاصل الضرب الثلاثى القياسى ينعدم

أى إن $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot (\overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{جـ}}) =$ صفر

المعنى الهندسى لحاصل الضرب الثلاثى القياسى



إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ ثلاثة متجهات، تكون ثلاثة أضلاع غير متوازية فى متوازى سطوح، فإن حجم متوازى السطوح = القيمة المطلقة لحاصل الضرب الثلاثى القياسى.

أى إن حجم متوازى السطوح = $|\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{جـ}}|$

مثال

(١٣) أوجد حجم متوازى السطوح الذى فيه ثلاثة أضلاع متجاورة يمثلها المتجهات $\overrightarrow{\text{أ}} = (٢ ، ١ ، ٣)$، $\overrightarrow{\text{ب}} = (-١ ، ٣ ، ٢)$، $\overrightarrow{\text{جـ}} = (١ ، ١ ، -٢)$

الحل

حجم متوازى السطوح $= |\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{جـ}}|$ (١)

$$\therefore \overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{جـ}} = \begin{vmatrix} \text{أ}_س & \text{أ}_ص & \text{أ}_ع \\ \text{ب}_س & \text{ب}_ص & \text{ب}_ع \\ \text{جـ}_س & \text{جـ}_ص & \text{جـ}_ع \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٣ \\ -١ & ٣ & ٢ \\ ١ & ١ & -٢ \end{vmatrix} = -٢٨$$

أى أن حجم متوازى السطوح $= |-٢٨| = ٢٨$ وحدة حجم

- وضح للطلاب أنه بتطبيق قاعدة الضرب الاتجاهى للمتجهين ثم الحصول على المحدد الموضح فى ص١٤٠ وبتطبيق قاعدة الضرب القياسى بين المتجه الثالث $\overrightarrow{\text{أ}}$ وناتج الضرب الاتجاهى يمكن الحصول على المحدد الموضح فى ص١٤١ والذى يمكن استيعابه بسهولة حيث يمثل كل صف إحداثيات كل متجه حيث

$$\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{جـ}} = \begin{vmatrix} \text{أ}_س & \text{أ}_ص & \text{أ}_ع \\ \text{ب}_س & \text{ب}_ص & \text{ب}_ع \\ \text{جـ}_س & \text{جـ}_ص & \text{جـ}_ع \end{vmatrix}$$

- وعلى الطلاب مراعاة الترتيب فى ادخال بيانات كل متجه وفقًا لعملية الضرب المحددة ($\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{جـ}}$)

- وضح للطلاب المقصود بمفهوم الترتيب الدورى الواحد فى إجراء عملية الضرب الثلاثى القياس وأن ناتج أو القيمة لاتختلف إذا تم الحفاظ على هذا الترتيب ويمكن استيعاب هذه الخاصة من خلال مثال تطبيقى لأى ثلاث متجهات وإيجاد حاصل الضرب الثلاثى القياسى فى حالات مختلفة.

المعنى الهندسى محاصل الضرب الثلاثى القياسى:

- توضح الخاصية ٢ من خواص الضرب الثلاثى القياس أنه فى حالة وجود الثلاث متجهات فى مستوى تواحد فإن حاصل الضرب الثلاثى القياسى يساوى صفر هذا يعنى انه لابد من وجود نظام ثلاثى متعامد حتى يمكن حساب الضرب الثلاثى القياسى وفى هذه الحالة إذا كانت هذه المتجهات تمثل ثلاثة اضلاع فى متوازى سطوح فإن ناتج الضرب يساوى حجم هذا المتوازى مع مراعاة أن الأضلاع التى تعبر عن تلك المتجهات يجب ألا تكون متوازية

حجم متوازي السطوح = $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{جـ}}$

$$\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{جـ}} = \begin{vmatrix} ٣ & -٤ & ١ \\ ٠ & ٢ & -٣ \\ ٣ & ٢ & ٢ \end{vmatrix}$$

$= ٣ (٤ + ٦) + ٤ (٩) + ١ (-٦)$

$= ٣٠ + ٣٦ - ٦ = ٦٠$

$\therefore$ حجم متوازي السطوح = ٦٠ وحدة حجم

- ومن خلال المثال الموضح ص١٤١ يمكن للطلاب التدريب على كيفية إيجاد حاصل الضرب الثلاثى القياسى لثلاثة متجهات وبالتالى حساب حجم متوازى السطوح الذى يعبر هذه المتجهات عن اضلاعه.

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

١٣. فى بند حاول أن تحل ص١٤٢

- ساعد الطلاب فى الوصول إلى الإجابة الصحيحة لإيجاد حجم متوازى السطوح

الوحدة الأولى: الهندسة والقياس فى بعدين وثلاثة أبعاد

حاول أن تحل

١٣ أوجد حجم متوازى السطوح الذى فيه ثلاثة أحرف غير متوازية، يمثلها المتجهات أ = (٣ ، -٤ ، ١)، ب = (٠ ، ٢ ، -٣) ، جـ = (٣ ، ٢، ٢)

تمارين (١-٣)

أكمل ما يأتى: إذا كانت س ، ص ، ع مجموعة يمينية من متجهات الوحدة:

١ س • ص = ...

٢ ص × ع = ...

٣ إذا كان أ = (٢ ، -١) ، ب = (٣ ، -٤) فإن مركبة أ فى اتجاه ب تساوى ....

٤ إذا كان أ • ب = ٠ فإن أ ، ب يكونان ....

٥ إذا كان أ × ب = و فإن أ ، ب يكونان ....

٦ قياس الزاوية بين المتجهين ٣س - ص ، -٤س + ٦ص يساوى ....

٧ الشغل المبذول من القوة ق =٣س +٧ع لتحريك جسيم من نقطة أ(١ ، ١، ٢) إلى نقطة ب(٧ ، ٣، ٥) يساوى ....

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

٨ س × ص = ...
أ و ب ٠ جـ ١ د ع

٩ إذا كان أ ، ب متجهى وحدة متعامدين فإن (أ - ٢ ب)•(٣ أ +٥ ب) =
أ -٨ ب -٧ جـ ٢٤ د ٠

١٠ إذا كان أ ، ب متجهى وحدة فإن أ • ب ∈ ....
أ]٠، ١[ب]-١، ١[جـ [-١، ١] د ح+

١١ قياس الزاوية بين المتجهين (٢ ، -٢، ٢) ، (١، ١، ٤) يساوى ....
أ ٥٧,٠٢ ب ٣٥,٢٦ جـ ١٣٤,٣٧ د ٠°

١٢ إذا كان المتجهان (٢ ،ك، -٣) ، (٤ ، ٦، -٦) متوازيين فإن ك = ...
أ ٦ ب ٣ جـ -٣ د ١

أجب عما يأتى:

١٣ أوجد أ • ب فى كل من الحالات الآتية:

١٤٢ الصف الثالث الثانوى - كتاب الطالب

إجابات بعض تمارين الدرس الثالث من ص ١٤٢ إلى ص ١٤٣

١ صفر	٢ س
٣ ٢	٤ متعامدين
٥ متوازيين	٦ ٨َ ١٤٢°
٧ ٣٩ وحدة شغل	٨ د
٩ ب	١٠ جـ
١١ أ	١٢ ب

١٣

أ) أ • ب = (٥، ١، -٢) • (٤، -٤، ٣) = ٢٠ - ٤ - ٦ = ١٠

ب) أ • ب = (-٣ س - ٢ ص - ع) • (٦ س + ٤ ص + ٢ ع) = -١٨ - ٨ - ٢ = -٢٨

جـ) أ + ب = (س) • (٢ ص - ع) = ١ × ٠ + ٠ × ٢ + ٠ × -١ = صفر

١٤

أ) $جتا\ \theta = \frac{(٥، ١، -٢) \bullet (١، ١، -١)}{\sqrt{٢٥+١+٤}\ \sqrt{١+١+١}} = \frac{٥+١+٢}{\sqrt{٢٩}\ \sqrt{٣}} = \frac{٨}{\sqrt{٨٧}}$

$\therefore \theta = ٥٧َ\ ١٤٢°$

ب) $جتا\ \theta = \frac{(٧، ٢، -١٠) \bullet (٢، ٦، -٤)}{\sqrt{٤٩+٤+١٠٠}\ \sqrt{٤+٣٦+١٦}} = \frac{١٤+١٢-٤٠}{\sqrt{١٥٣}\ \sqrt{٥٦}} = \frac{-١٤}{\sqrt{١٥٣}\ \sqrt{٥٦}}$

$\therefore \theta = ٤٢َ\ ٩٨°$

جـ) $جتا\ \theta = \frac{(٢، ١، ٤) \bullet (١، -٢، ٠)}{\sqrt{٤+١+١٦}\ \sqrt{١+٤+٠}} = \frac{صفر}{\sqrt{٢١}\ \sqrt{٥}}$

$\therefore \theta = ٩٠°$

١٥

أ) أ × ب = (-٢، ٣، ١) × (١، ٣، -٤)

$$\begin{vmatrix} س & ص & ع \\ -٢ & ٣ & ١ \\ ١ & ٣ & -٤ \end{vmatrix} = -١٥\ س - ٧\ ص - ٩\ ع$$

ب)

$$\begin{vmatrix} س & ص & ع \\ ٧ & ٢ & -١٠ \\ ٢ & ٦ & ٤ \end{vmatrix} = -١٥\ س - ٧\ ص - ٩\ ع$$

جـ)

$$\begin{vmatrix} س & ص & ع \\ ٢ & ١ & ٤ \\ ١ & -٢ & ٠ \end{vmatrix} = ٨\ س + ٤\ ص - ٥\ ع$$

ضرب المتجهات | ١ - ٣

(أ) أ = (٥ ، ١ ، -٢) ، ب = (٤ ، -٤، ٣)

(ب) أ = -٣س - ٢ص - ع ، ب = ٦س + ٤ص + ٢ ع

(ج) أ = س ، ب = ٢ص - ع

(١٤) أوجد قياس الزاوية بين المتجهين فى كل من الحالات الآتية:

(أ) (٥ ، ١، -٢) ، (١ ، ١، -١) (ب) (٧ ، ٢ ، -١٠) ، (٢ ، ٦ ، ٤)

(ج) (٢ ، ١ ، ٤) ، (١، -٢، ٠)

(١٥) أوجد أ × ب فى كل من الحالات الآتية:

(أ) أ = (-٢ ، ٣ ، ١) ، ب = (١ ، ٣ ، -٤)

(ب) أ = -س - ٢ص ، ب = ٣ص - ٥ ع

(ج) || أ || = ٦ ، || ب ||= ٨ وقياس الزاوية بينهما ٦٠°

(١٦) أ ب جـ ى مربع طول ضلعه ١٢سم. ى متجه وحدة عمودى على مستواه. أوجد:

(أ) أب • أجـ (ب) أب × جـأ (ج) بجـ • أى

(د) بى × أجـ (هـ) أب • بجـ (و) أب × بجـ

(١٧) أوجد متجه وحدة عموديًّا على المستوى الذى يحوى المتجهين.

أ = ٢س - ٣ص + ع ، ب = -س + ٢ص -٣ ع

(١٨) احسب مساحة المثلث ى هـ و فى كل مما يأتى:

(أ) ى(٥ ، ١ ، -٢) ، هـ (٤ ، -٤ ، ٣) ، و (٢ ، ٤ ، ٠)

(ب) ى (٤ ، ٠ ، ٢) ، هـ (٢ ، ١ ، ٥) ، و (-١ ، ٠ ، -١)

(١٩) احسب مساحة متوازى الأضلاع ل م ن هـ فى كل مما يأتى:

(أ) ل (١ ، ١) ، م (٢ ، ٣) ، ن(٥ ، ٤) (ب) ل (٢ ، ١ ، ٣) ، م (١ ، ٤ ، ٥) ، ن(٢ ، ٥ ، ٣)

(٢٠) أوجد حجم متوازى السطوح الذى فيه أ ، ب ، جـ تمثل ثلاثة أحرف متجاورة فى كل مما يأتى:

(أ) أ = (١ ، ١ ، ٣) ، ب = (٢ ، ١ ، ٤) ، جـ = (٥ ، ١ ، -٢)

(٢١) فى كل مما يأتى بين ما إذا كان المتجهان متوازيين أم متعامدين أم غير ذلك:

(أ) أ = (٠ ، ٢، ٢) ، ب = (٣ ، ٠ ، -٤)

(ب) هـ = ١٠س + ٤٠ص ، و = -٣ص + ٨ ع

(ج) أ = -٢س + ص -٢ ع ، ب = ٨س - ٤ص + ٨ ع

كتاب الجبر والهندسة الفراغية - الهندسة الفراغية ١٤٣

(أ) أ × ب

= | س ص ع ؛ -٢ ٣ ١ ؛ ١ ٣ -٤ | = -١٥ س - ٧ ص - ٩ ع

(ب)

= | س ص ع ؛ -١ -٢ ٠ ؛ ٠ ٣ -٥ | = ١٠ س - ٥ ص - ٣ ع

(ج)

أ × ب = || أ || || ب || جا هـ ى حيث ى متجه وحدة عمودى على أ ، ب

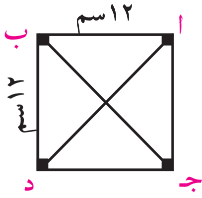
= (٦ × ٨ جا ٦٠) ى

= ٢٤ √٣ ى

(١٦)

(أ) أب • أجـ = ١٢ × ١٢ √٢ جتا ٤٥ = ١٤٤

(ب) أب × جـأ = أب × - أجـ



= -(أب × أجـ)

= -(١٢ × ١٢ √٢ جا ٤٥) ى

= -١٤٤ ى

أو أب × جـأ = (١٢ × ١٢ √٢ جتا ١٣٥) ى

= -١٤٤ ى

(ج) بجـ • أى = ١٢ × ١٢ جتا ٠ = ١٤٤

(د) بى × أجـ = (١٢√٢ × ١٢√٢ جا ٤٥) ى

= ١٤٤ √٢ ى

(هـ) أب • بجـ = صفر

(و) أب • بجـ = (١٢ × ١٢ جا ٩٠) ى

= ١٤٤ ى

(١٧) أ × ب = | س ص ع ؛ ٢ -٣ ١ ؛ -١ ٢ -٣ | = ٧ س + ٥ ص + ٧ ع

|| أ × ب || = √(٤٩ + ٢٥ + ٤٩) = √١٢٣

∴ متجه الوحدة العمودى =

(٧ / √١٢٣) س + (٥ / √١٢٣) ص + (٧ / √١٢٣) ع

١٨

ب $\overrightarrow{\text{ى و}} = (-٥ ، ٠ ، -٣)$ ، $\overrightarrow{\text{ى هـ}} = (-٢ ، ١ ، ٣)$

$$\overrightarrow{\text{ى و}} \times \overrightarrow{\text{ى هـ}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ -٥ & ٠ & -٣ \\ -٢ & ١ & ٣ \end{vmatrix} = ٣\,\overrightarrow{\text{س}} + ٢١\,\overrightarrow{\text{ص}} - ٥\,\overrightarrow{\text{ع}}$$

$$\| \overrightarrow{\text{ى و}} \times \overrightarrow{\text{ى هـ}} \| = \sqrt{٩ + ٤٤١ + ٢٥} = ٢١{,}٨$$

∴ مساحة △ $= \frac{١}{٢} \times ٢١{,}٨ = ١٠{,}٩$ وحدة مربعة

١٩

أ

$\overrightarrow{\text{ل م}} = (١ ، ٢)$ ، $\overrightarrow{\text{ل ن}} = (٤ ، ٣)$

$$\therefore \overrightarrow{\text{ل م}} \times \overrightarrow{\text{ل ن}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ ١ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{vmatrix} = -٥\,\overrightarrow{\text{ع}}$$

∴ مساحة المتوازى $= \| \overrightarrow{\text{ل م}} \times \overrightarrow{\text{ل ن}} \| = ٥$ وحدات مربعة

ب $\overrightarrow{\text{ل م}} = (-١ ، ٣ ، ٢)$ ، $\overrightarrow{\text{ل ن}} = (٠ ، ٤ ، -٢)$

$$\therefore \overrightarrow{\text{ل م}} \times \overrightarrow{\text{ى هـ}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ -١ & ٣ & ٢ \\ ٠ & ٤ & -٢ \end{vmatrix} = ١٤\,\overrightarrow{\text{س}} - ٢\,\overrightarrow{\text{ص}} - ٤\,\overrightarrow{\text{ع}}$$

∴ مساحة متوازى الأضلاع $= \| \overrightarrow{\text{ل م}} \times \overrightarrow{\text{ل ن}} \| =$

$= \sqrt{١٤^٢ + ٢^٢ + ٤^٢} = ١٤{,}٧$ وحدة مربعة

٢٠

أ حجم متوازى السطوح $= | \overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{جـ}} | = ٩$ وحدات مكعبة

٢١

أ غير متعامدين لأن $\overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ب}} \neq ٠$ وغير متوازيين لأن $\overrightarrow{\text{أ}} \neq \text{ك} \bullet \overrightarrow{\text{ب}}$

ب $\overrightarrow{\text{هـ}} \bullet \overrightarrow{\text{و}} = (١٠ ، ٤٠ ، ١٥) \bullet (٠ ، -٣ ، ٨)$

$= ١٠ \times ٠ + ٤٠ \times (-٣) + ١٥ \times ٨$

= صفر

∴ $\overrightarrow{\text{هـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{و}}$ متعامدان

جـ $\because \overrightarrow{\text{أ}} = -٢\,\overrightarrow{\text{س}} + \overrightarrow{\text{ص}} - ٢\,\overrightarrow{\text{ع}}$

، $\overrightarrow{\text{ب}} = ٨\,\overrightarrow{\text{س}} - ٤\,\overrightarrow{\text{ص}} + ٨\,\overrightarrow{\text{ع}}$

الوحدة الأولى: الهندسة والقياس فى بعدين وثلاثة أبعاد

تمارين عامة

أكمل ما يأتى:

١ النقطة (٢ ، ٠ ، -٣) تقع فى مستوى الإحداثيات .... الذى معادلته ....

٢ الشكل المقابل يمثل متوازى مستطيلات:
أ (٦ ، ٨ ، ٢٤) . فإن

أ إحداثيات النقطة ى هى ....

ب إحداثيات النقطة جـ هى ....

جـ زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{\text{و ى}}$ هى ....

ع ، ب ، أ(٦، ٨، ٢٤) ، و ، جـ ، ص ، س ، هـ ، ى

٣ إذا كان أ(-١ ، ٢ ، ٣) ، ب(٤ ، -١ ، ٥) فإن $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ = ...

٤ إذا كانت النقطة (-٢ ، ٤ ، م) تقع على الكرة $(\text{س} + ٢)^٢ + (\text{ص} - ١)^٢ + (\text{ع} - ٣)^٢ = ٢٥$ فإن م = ...

٥ إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{ك}، ٣، -٤)$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (-٢ ، ٩ ، \text{م})$ وكان $\overrightarrow{\text{أ}} \,//\, \overrightarrow{\text{ب}}$ فإن ك = ... ، م = ...

٦ إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ب}} = \| \overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} \|$ فإن قياس الزاوية بين متجهين $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ يساوى ....

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

٧ المستقيمان $\overleftrightarrow{\text{س س}'}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ع ع}'}$ يكونان مستوى الإحداثيات الذى معادلته ....

أ س = ٠ ب ص = ٠ جـ ع = ٠ د ص = ٢

٨ معادلة الكرة التى مركزها نقطة الأصل وتمر بالنقطة (٣ ، -١، ٢) هى ....

أ $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ + \text{ع}^٢ = ٤$

ب $(\text{س} - ٣)^٢ + (\text{ص} + ١)^٢ + (\text{ع} - ٢)^٢ = ١٤$

جـ $(\text{س} - ٣)^٢ + (\text{ص} + ١)^٢ + (\text{ع} - ٢)^٢ = \sqrt{١٤}$

د $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ + \text{ع}^٢ = ١٤$

٩ إحداثيات نقطة منتصف القطعة $\overline{\text{ى هـ}}$ حيث ى(٢ ، ٣ ، ٣) ، هـ(٦ ، -١ ، -٤)

أ $(٤ ، ٢ ، ٣\frac{١}{٢})$ ب $(٢ ، ١ ، \frac{١}{٢})$ جـ $(٤ ، ١ ، -\frac{١}{٢})$ د $(٤ ، ١ ، \frac{١}{٢})$

١٠ إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} \,//\, \overrightarrow{\text{ب}}$ فإن $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}$ = ...

أ صفر ب ١ جـ $\| \overrightarrow{\text{أ}} \|$ د $\| \overrightarrow{\text{ب}} \|$

١١ المتجه الذى يمثل متجه وحدة فى المتجهات الآتية:

أ (-٣ ، ٢ ، ٢) ب $(\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٣} ، \frac{١}{٤})$ جـ $(\frac{٣}{٥} ، \frac{-٤}{٥} ، ٠)$ د $(\frac{-١}{١٢} ، \frac{-٣}{١٢} ، \frac{٢}{١٢})$

١٥٠ الصف الثالث الثانوى - كتاب الطالب

$= -٤ (-٢\,\overrightarrow{\text{س}} + \overrightarrow{\text{ص}} - ٢\,\overrightarrow{\text{ع}})$

$= -٤\,\overrightarrow{\text{أ}}$

∴ $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متوازيان

تمارين عامة

⑫ إذا كان ك، هـ، و هى جيوب تمام زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$ فإن:
(أ) ك + هـ + و = ١ (ب) ك = هـ = و (ج) ك^{٢} + هـ^{٢} + و^{٢} = ١ (د) ك + هـ + و = $\overrightarrow{أ}$

⑬ إذا كان $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{و}$ ، $\overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{جـ} = ٠$ فإن $\overrightarrow{ب} \bullet \overrightarrow{جـ}$ = ...
(أ) ٠ (ب) ١ (ج) $\overrightarrow{أ}$ (د) $\|\overrightarrow{ب}\|$

⑭ مستويا الإحداثيات س ص، ص ع يتقاطعان فى ....
(أ) نقطة الأصل (ب) محور س (ج) محور ص (د) محور ع

أجب عن ما يأتى:

⑮ اثبت أن المثلث الذى رأسه النقط (٧ ، ١ ، ٣)، (٥ ، ٣ ، ٤)، (٣ ، ٥ ، ٣) هو مثلث متساوى الساقين.

⑯ أوجد مركز وطول نصف قطر الكرة س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} = ٦ع

⑰ إذا كان أ (-٢ ، ٣، ٥)، ب (١ ، ٤ ، -٢) أوجد $\overrightarrow{أب}$

⑱ إذا كان $\overrightarrow{جـ}$ = (١ ، -٢ ، ٢) فأوجد قيمة الوحدة فى اتجاه $\overrightarrow{جـ}$

⑲ إذا كان المتجه $\overrightarrow{أ}$ يصنع مع محاور الإحداثيات الموجبة س، ص، ع زوايا قياساتها ٦٠° ، ٨٠° ، θ° حيث θ زاوية حادة
(أ) أوجد قيمة θ
(ب) اكتب الصورة الجبرية للمتجه $\overrightarrow{أ}$ إذا علمت أن $\|\overrightarrow{أ}\|$ = ١٣

⑳ إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (١ ، ٦ ، ٢)، $\overrightarrow{ب}$ = (ك، ٣ ، م)، $\overrightarrow{جـ}$ = (ك، م ، ك + م) وكان $\overrightarrow{أ}$ // $\overrightarrow{ب}$ أوجد $\|\overrightarrow{جـ}\|$

㉑ إذا كان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهى وحدة فى ح^{٣}. تحت أى شرط يكون حاصل الضرب الاتجاهى $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}$ يمثل متجه وحدة فى ح^{٣}. فسر إجابتك.

㉒ أ ب جـ ء مستطيل فيه أ ب = ٦سم، ب جـ = ٨سم أوجد
(أ) $\overrightarrow{أب} \bullet \overrightarrow{أجـ}$ (ب) $\overrightarrow{أب} \bullet \overrightarrow{جـء}$ (ج) مركبة $\overrightarrow{جـء}$ فى اتجاه $\overrightarrow{بجـ}$

㉓ أوجد الشغل المبذول من القوة $\overrightarrow{ق}$ = (٢ ، -٣، ٥) لتحريك جسيم من نقطة (١ ، -١ ، ٠) إلى نقطة (٢ ، ٤ ، -٢)

㉔ أوجد الشغل المبذول من وزن جسم مقداره ٤٠ نيوتن يتحرك رأسيًا لأعلى مسافة ١٠ أمتار فوق سطح الأرض

㉕ برهن كلًّا مما يأتى حيث $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ∋ ح^{٣}
(أ) $\|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}\|^{٢} + |\overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{ب}|^{٢} = \|\overrightarrow{أ}\|^{٢} \|\overrightarrow{ب}\|^{٢}$
(ب) إذا كان $\overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{ب} = ٠$ ، $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{و}$ فإن إما $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{و}$ أو $\overrightarrow{ب} = \overrightarrow{و}$

كتاب الجبر والهندسة الفراغية - الهندسة الفراغية ١٥١

أجوبة بعض التمارين العامة من ص١٥٠ إلى ١٥١

① س ع ، ص = ٠

②
(أ) ء (٦، ٨، ٠) ، (ب) جـ (٠، ٨، ٠)
(ج) ٥٣° ، ٥٢َ ، ٣٦° ، ٩٠°

③ $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$ = (٥، -٣، ٢)

④ ٧، -١

⑤ ك = $\frac{-٢}{٣}$ ، م = -١٢

⑥ ٤٥°

⑦ ب ⑩ د

⑨ جـ ⑩ أ

⑪ جـ ⑫ جـ

⑬ أ ⑭ جـ

⑮ بفرض أن أ (٧، ١، ٣) ، ب(٥، ٣، ٤) ، جـ(٣، ٥، ٣)
∴ (أ ب)^{٢} = (٥ - ٧)^{٢} + (٣ - ١)^{٢} + (٤ - ٣)^{٢} = ٩
(ب جـ)^{٢} = (٣ - ٥)^{٢} + (٥ - ٣)^{٢} + (٣ - ٤)^{٢} = ٩
∴ أ ب = ب جـ ∴ △ متساوى الساقين

⑯ ∵ س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} = ٦ع
∴ س^{٢} + ص^{٢} + (ع^{٢} - ٦ع + ٩) = ٩
∴ س^{٢} + ص^{٢} + (ع - ٣)^{٢} = ٩
∴ المركز (٠، ٠، ٣) ، نق = ٣

⑰ $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$ = (١، ٤، -٢) - (-٢، ٣، ٥)
= (٣، ١، -٧)

⑱ ∵ $\overrightarrow{جـ}$ = (١، -٢، ٢)
∴ $\|\overrightarrow{جـ}\| = \sqrt{١ + ٤ + ٤}$ = ٣
∴ متجه الوحدة فى اتجاه $\overrightarrow{جـ}$ = ($\frac{١}{٣}$ ، $\frac{-٢}{٣}$ ، $\frac{٢}{٣}$)

⑲ (أ) (جتا ٦٠)^{٢} + (جتا ٨٠)^{٢} + (جتا θ)^{٢} = ١
(جتا θ)^{٢} = ١ - (جتا ٦٠)^{٢} - (جتا ٨٠)^{٢}
∴ θ = ٥٧َ ٤٣°
$\overrightarrow{أ}$ = (١٣ جتا ٦٠) $\overrightarrow{س}$ + (١٣ جتا ٨٠) $\overrightarrow{ص}$
+ (١٣ جتا ٥٧َ ٤٣°) $\overrightarrow{ع}$
= $\frac{١٣}{٢}$ $\overrightarrow{س}$ + ٢,٣ $\overrightarrow{ص}$ + ٩,٤ ع

⑳ ∵ $\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$ ∴ $\frac{١}{ك}$ $\frac{١}{٢}$ ، م = ١
∴ $\overrightarrow{جـ}$ = ($\frac{١}{٢}$ ، ١، $\frac{٣}{٢}$)
$\|\overrightarrow{جـ}\| = \sqrt{\frac{١}{٤} + ١ + \frac{٩}{٤}} = \sqrt{\frac{٧}{٢}}$

㉒
(أ) $\overrightarrow{أب} \bullet \overrightarrow{أجـ}$ = صفر لأنهما متعامدان
(ب) $\overrightarrow{أب} \bullet \overrightarrow{جـء}$ = ٦ × ٦ جتا ١٨٠ = ٣٦٠
(ج) مركبه $\overrightarrow{جـء}$ فى اتجاه $\overrightarrow{بجـ}$ = $\overrightarrow{و}$

㉓ $\overrightarrow{ب}$ = (٢، ٤، -٢) - (١، -١، ٠)
= (١، ٥، -٢) الشغل = $\overrightarrow{ق} \bullet \overrightarrow{ف}$
= (٢، -٣، ٥) • (١، ٥، -٢) = ٢ - ١٥ - ١٠
= -٢٣ وحدة شغل

㉔ الشغل = ٤٠ × ١٠ جتا ١٨٠ = -٤٠٠ جول

㉕
(أ) $\|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}\|^{٢} + \|\overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{ب}\|^{٢}$
= (ا ب جا ى)^{٢} + (ا ب جتا ى)^{٢}
ا^{٢} ب^{٢} (جا^{٢} ى + جتا^{٢} ى) = $\|\overrightarrow{أ}\|^{٢} \|\overrightarrow{ب}\|^{٢}$
(ب) $\|\overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{ب}\|^{٢}$

عندما $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{و}$ ، $\overrightarrow{ب} = \overrightarrow{و}$ أ, $\theta = ٩٠$

، $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{و}$ عندما $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{و}$ أو $\overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{و}$

إجابات بعض التمارين من الأختبار التراكمى

(١) ٤ (٢) -٣

(٣) $(٢، \frac{-١}{٢}، ١)$

(٤)

أ) ب (٠، ٨، ٤) ب) جـ (٠، ٠، ٤)

(٥) $(س - ١)^٢ + (ص + ٣)^٢ + (ع + ١)^٢ = ١٣$

(٦) (-٣، -٣، ٧)

(٧) $\frac{١}{\sqrt{٣٨}}$ (٥، -٢، ٣)

(٨) جـ (٩) أ

(١٠) جـ (١١) ب

(١٢) ب

(١٣) نفرض أن أ (٢، ٢، ١) ، ب (٠، ٠، ٠) جـ (٢، -٤، ٤)

$(أب) = \sqrt{٤ + ٤ + ١} = ٣$

$ب جـ = \sqrt{٤ + ١٦ + ١٦} = ٦$

$أ جـ = \sqrt{٠ + ٣٦ + ٩} = \sqrt{٤٥}$

∴ $(أ جـ)^٢ = (أب)^٢ + (ب جـ)^٢$

∴ △ قائم الزاوية فى ب

مساحة سطحه $= \frac{١}{٢} \times ٣ \times ٦ = ٩$ وحدات مربعة

(١٤) ∵ الكرة تمس المستوى س ع

∴ نق = ٤

∴ معادلة الكرة $س^٢ + (ص - ٤)^٢ + ع^٢ = ١٦$

(١٥) $|| \overrightarrow{أ} || = \sqrt{١ + ٩ + ٤} = \sqrt{١٤}$

$\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} = (١، -١، ٥)$

∴ $|| \overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} || = \sqrt{١ + ١ + ٢٥} = \sqrt{٢٧}$

الوحدة الأولى: الهندسة والقياس فى بعدين وثلاثة أبعاد

اختبار تراكمى

أكمل ما يأتى:

(١) بعد النقطة (-٤ ، -٣، ٢) عن مستوى الإحداثيات ص ع يساوى .... وحدة طول

(٢) إذا كانت النقطة (أ - ٢، ب + ٣ ، جـ - ٤) تقع فى المستوى الإحداثى س ع فإن ب = ...

(٣) إذا كانت أ (-١ ، ٠ ، -٢) ، ب (٥ ، -١ ، ٤) فإن إحداثيات منتصف $\overline{أب}$ هى ....

(٤) الشكل المقابل متوازى مستطيلات: أ (٥، ٨ ، ٤) فإن

أ) إحداثيات النقطة ب هى ....

ب) إحداثيات النقطة جـ هى ....

ع، جـ، ب، أ، و، ص، س

(٥) معادلة الكرة التى مركزها النقطة (١، -٣، -١) وتمر بالنقطة (-٢، -١، -١) هى ....

(٦) إذا كان $\overrightarrow{أ} = (-٢، ٣، ١)$، $\overrightarrow{ب} = (٠ ، ٢، -٢)$، $\overrightarrow{جـ} = (١، -٣، ٥)$ فإن ٢ $\overrightarrow{أ}$ - ٣ $\overrightarrow{ب}$ + $\overrightarrow{جـ}$ = ...

(٧) إذا كان $\overrightarrow{أ} = (٥، -٢ ، ٣)$ فإن متجه الوحدة فى اتجاه $\overrightarrow{أ}$ يساوى ....

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات:

(٨) إذا كان $\overrightarrow{أ} = (٣، -٢، م)$ وكان $|| \overrightarrow{أ} || = \sqrt{٢٢}$ فإن م = ...

أ) ٢١ ب) ٩ جـ) ٣ د) ١٧

(٩) إذا كان $\overrightarrow{أ} = ٢\overrightarrow{س} + ٣\overrightarrow{ص} - \overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ب} = ٤\overrightarrow{س} - \overrightarrow{ص}$ فإن $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}$ =

أ) ٥ ب) ٤ جـ) ٣ د) ٢

(١٠) إذا كان $\overrightarrow{أ} = ٤\overrightarrow{س} - ٣\overrightarrow{ص} + ٥\overrightarrow{ع}$ فإن مركبة $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه محور ص تساوى

أ) ٤ ب) ٣ جـ) ٣ د) ٥

(١١) إذا كان $\overrightarrow{أ} = (٢ ، ٣ ، -١)$ ، $\overrightarrow{ب} = ٣\overrightarrow{س} + ٤\overrightarrow{ص}$ فإن مركبة $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه $\overrightarrow{ب}$ تساوى

أ) ١٨ ب) $\frac{١٨}{٥}$ جـ) $-\frac{١٨}{٥}$ د) $\frac{١٨}{٢٥}$

(١٢) متجه زوايا الاتجاه له ٤٥° ، ٤٥° ، θ فإن θ = ...

أ) ٤٥° ب) ٩٠° جـ) ٠° د) ٦٠°

١٥٢ الصف الثالث الثانوى - كتاب الطالب

(١٦)

∵ $جا^٢ هـ + جا^٢ هـ + جا^٢ هـ = ١$

∴ $٣ جتا^٢ هـ = ١$ $جتا هـ = \frac{١}{\sqrt{٣}}$

∴ $\overrightarrow{أ} = (٢١\sqrt{٣} \times \frac{١}{\sqrt{٣}}) \overrightarrow{س} + (٢١\sqrt{٣} \times \frac{١}{\sqrt{٣}}) \overrightarrow{ع}$

$= ٢١ \overrightarrow{س} + ٢١ \overrightarrow{ص}$

(١٧) $\overrightarrow{و} = ك (-٢ ، ٤، ٣)$ حيث ك > ٠

∴ $|| \overrightarrow{و} || = ك \sqrt{٤ + ١٦ + ٩}$

∴ $١٢ \sqrt{٢٩} = ك \times \sqrt{٢٩}$

∴ ك = ١٢

∴ $\overrightarrow{و} = (-٢٤ ، ٤٨، ٣٦)$

اختبار تراكمى

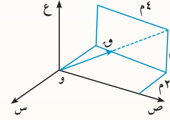
أجب عما يأتى:

١٣ أثبت أن المثلث الذى رؤوسه النقطة (٢ ، ٢ ، ١)، (٠ ، ٠ ، ٠) (٢ ، -٤ ، ٤) هو مثلث قائم الزاوية، وأوجد مساحته.

١٤ أوجد معادلة الكرة التى مركزها النقطة (٠ ، ٤، ٠) وتمس المستوى الإحداثى س ع

١٥ إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (١ ، -٣، ٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٠ ، ٢ ، ٣) أوجد $\|\overrightarrow{أ}\|$ ، $\|\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}\|$

١٦ أوجد الصورة الجبرية للمتجه $\overrightarrow{أ}$ الذى معياره ٢١ $\sqrt{٣}$ ويصنع زوايا متساوية القياس مع محاور الإحداثيات الموجبة.



١٧ أوجد مركبات القوة $\overrightarrow{ق}$ التى مقدارها ١٢ $\sqrt{٢٩}$ نيوتن

١٨ المطلوب تحليل القوة $\overrightarrow{ق}$ إلى مركبتين $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ بحيث $\overrightarrow{ق_١}$ فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{أ}$ $\overrightarrow{ق_٢}$ عمودية على المتجه $\overrightarrow{أ}$. برهن أن:

$$\overrightarrow{ق_١} = \left(\frac{\overrightarrow{ق_١} \cdot \overrightarrow{أ}}{\|\overrightarrow{أ}\|^٢}\right)\overrightarrow{أ} \quad ، \quad \overrightarrow{ق_٢} = \overrightarrow{ق} - \left(\frac{\overrightarrow{ق} \cdot \overrightarrow{أ}}{\|\overrightarrow{أ}\|^٢}\right)\overrightarrow{أ}$$

١٩ إذا كان $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص} - ٢\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ب} = ٣\overrightarrow{س} - ٢\overrightarrow{ص} + ٥\overrightarrow{ع}$ أوجد

أ $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}$ ب $(٢\overrightarrow{أ}) \times (٣\overrightarrow{ب})$ ج $\overrightarrow{أ} \times (\overrightarrow{أ} - ٢\overrightarrow{ب})$

٢٠ تفكير إبداعى: إذا كان أ (٠ ، ٠، ١) ، ب (١ ، ٠ ، ٠)، جـ (٠ ، ١ ، ٠) أوجد متجه وحدة عمودى على المستوى أ ب جـ

٢١ أوجد قياسات الزوايا التى يصنعها المتجه $\overrightarrow{جـ} = ٣\overrightarrow{س} - ٤\overrightarrow{ص} + ٥\overrightarrow{ع}$ مع الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات.

كتاب الجبر والهندسة الفراغية - الهندسة الفراغية ١٥٣

---

١٩ أ $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} =$

$$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ١ & ١ & -٢ \\ ٣ & -٢ & ٥ \end{vmatrix} = \overrightarrow{س} - ١١\overrightarrow{ص} - ٥\overrightarrow{ع}$$

ب $(٢\overrightarrow{أ}) \times (٣\overrightarrow{ب}) = ٦(\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب})$

$= ٦\overrightarrow{س} - ٦٦\overrightarrow{ص} - ٣٠\overrightarrow{ع}$

ج $\overrightarrow{أ} \times (\overrightarrow{أ} - ٢\overrightarrow{ب})$

$= (١، ١، -٢) \times [(١، ١، -٢) - ٢(٣، -٢، ٥)]$

$= (١، ١، -٢) \times (-٥، ٥، -١٢)$

$$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ١ & ١ & -٢ \\ -٥ & ٥ & -١٢ \end{vmatrix} = -٢\overrightarrow{س} + ٢٢\overrightarrow{ص} + ١٠\overrightarrow{ع}$$

٢٠ $\overrightarrow{اب} = (١، ٠، -١)$ ، $\overrightarrow{اجـ} = (٠، ١، -١)$

$$\overrightarrow{اب} \times \overrightarrow{اجـ} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ١ & ٠ & -١ \\ ٠ & ١ & -١ \end{vmatrix}$$

$= \overrightarrow{س} - \overrightarrow{ص} + \overrightarrow{ع}$

$$\therefore \frac{\overrightarrow{اب} \times \overrightarrow{اجـ}}{\|\overrightarrow{اب}\| \, \|\overrightarrow{اجـ}\|} = \frac{١}{\sqrt{٣}}(\overrightarrow{س} - \overrightarrow{ص} + \overrightarrow{ع})$$

هو متجه وحدة عمودى على كل من $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$

٢١ $\|\overrightarrow{جـ}\| = \sqrt{٩ + ١٦ + ٢٥} = ٥\sqrt{٢}$

$\therefore$ جتا $\theta_س = \frac{٣}{٥\sqrt{٢}} \Leftarrow \theta_س = ٥٤' \; ٦٤°$

$\therefore$ جتا $\theta_ص = \frac{-٤}{٥\sqrt{٢}} \Leftarrow \theta_ص = ٢٧' \; ١٢٤°$

$\therefore$ جتا $\theta_ع = \frac{٥}{٥\sqrt{٢}} \Leftarrow \theta_ع = ٤٥°$

الوحدة الثانية

الخطوط المستقيمة والمستويات فى الفراغ

Straight lines and planes in space

مقدمة الوحدة:

تمثل الوحدة الحالية امتداد وتكملة لما تم دراسته فى الوحدات السابقة واستكمالًا لتعلم العلاقات بين الخطوط والأشكال فى الفراغ حيث تم دراسة موضع نقطة فى الفراغ ومتجه موضعها وسيتم فى الوحدة الحالية التعرف على المفاهيم والعلاقات الخاصة بمعادلة الخط المستقيم والمستوى فى الفراغ، وكذلك الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم.

مخرجات الوحدة:

بعد دراسة هذه الوحدة وتنفيذ الأنشطة، يتوقع من الطالب أن:

- يوجد متجه اتجاه الخط المستقيم فى الفراغ.
- يوجد المعادلة البارامترية للمستقيم فى الفراغ والمعادلة الاتجاهية للمستقيم فى الفراغ.
- يوجد المعادلة المتماثلة الكارتيزية للمستقيم فى الفراغ.
- يوجد المعادلة العامة للمستوى فى الفراغ.
- يوجد المعادلة القياسية للمستوى فى الفراغ.
- يتعرف الزاوية بين مستويين فى الفراغ.
- يستنتج شرط تعامد مستويين فى الفراغ.
- يستنتج شرط توازى مستويين فى الفراغ.
- يوجد معادلة خط تقاطع مستويين فى الفراغ.
- يعين المسافة بين نقطة ومستقيم فى الفراغ.
- يوجد المسافة بين نقطة ومستوى باستخدام حاصل الضرب القياسى وباستخدام الصورة الكارتيزية.
- يعين المسافة بين مستويين متوازيين.



مقدمة الوحدة

درست فى الوحدة السابقة تحديد نقطة فى الفراغ، كذلك متجهات الموضع وكيفية إيجاد معيارها وهذه تعتبر من أساسيات هذه الوحدة حيث إنها تعتبر استكمالًا لما درس فى الوحدة السابقة ومكملًا لما درس فى العام السابق.

وفى هذه الوحدة سوف يدرس الطالب معادلة المستقيم فى الفراغ كذلك معادلة المستوى بصورها المختلفة، وقد تنوعت الأمثلة وطرق الحل تحقيقًا للأهداف المعرفية والمهارية التى تساعد الطالب على دراسة المعارف والمفاهيم الأخرى المرتبطة بهندسة الفراغ فى المراحل التعليمية التالية.

أهداف الوحدة

فى نهاية الوحدة وتنفيذ الأنشطة فيها، يتوقع من الطالب أن:

- يوجد متجه اتجاه الخط المستقيم فى الفراغ.
- يوجد المعادلة البارامترية للمستقيم فى الفراغ والمعادلة الاتجاهية للمستقيم فى الفراغ.
- يوجد المعادلة المتماثلة الكارتيزية للمستقيم فى الفراغ.
- يوجد المعادلة العامة للمستوى فى الفراغ.
- يوجد المعادلة القياسية للمستوى فى الفراغ.
- يتعرف الزاوية بين مستويين فى الفراغ.
- يستنتج شرط تعامد مستويين فى الفراغ.
- يستنتج شرط توازى مستويين فى الفراغ.
- يوجد معادلة خط تقاطع مستويين فى الفراغ.
- يعين المسافة بين نقطة ومستقيم فى الفراغ.
- يوجد المسافة بين نقطة ومستوى باستخدام حاصل الضرب القياسى وباستخدام الصورة الكارتيزية.
- يعين المسافة بين مستويين متوازيين.

الزمن المقياس لتدريس الوحدة:

٥ حصص

مهارات التفكير التى تنميها الوحدة:

التفكير الناقد - ادراك العلاقات - التفكير التحليل - حل المشكلات

الوسائل التعليمية المستخدمة:

البرامج الرسومية ثلاثية الأبعاد

طرق التدريس المقترحة

الطريقة المباشرة - حل المشكلات - الحوار والمناقشة - التعلم التعاونى - التعلم بالاكتشاف - الطريقة الاستنباطية

طرق التقيم المقترحة:

اسئلة شفهية وتحريرية فردية وجماعية قبل وأثناء وبعد الدرس، تمارين محلوله وبها اخطاء مطلوب تصويبها - تمارين عامة واختبار تراكمى فى نهاية الوحدة.

المخطط التنظيمى للوحدة:

يوضح المخطط التنظيمى للوحدة عدد من المفاهيم التى سيتم تعلمها من خلال دروس الوحدة والتى ترتبط بالخط المستقيم والمستوى فى الفراغ حيث يتعرف الطالب على الصورة المتجهة والبارامتريه والمتماثلة للخط المستقيم والصورة المتجهة والقياسية والعامة للمستوى، كما يتعرف على كيفية حساب الزاوية بين مستقيمين والزاوية بين مستويين فى الأوضاع المختلفة (التقاطع التوازى - التعامد)

مصطلحات أساسية

- متجه اتجاه Direction vector
- زوايا اتجاه Direction angles
- جيوب تمام الاتجاه Direction cosines
- نسب الاتجاه Direction ratios
- معادلة متجهة Vector equation
- معادلات بارامترية Parametric equations
- معادلة كارتيزية Cartesian equation
- معادلة عامة General equation
- يتناسب Proportional
- مستقيمان متوازيان Parallel straight Lines
- مستقيمان متعامدان Perpendicular straight Lines
- مستقيمان متقاطعان Intersecting straight Lines
- مستقيمان متخالفان Skew straight Lines
- بعد عمودى Perpendicular distance
- مستوى plane
- صورة قياسية Standard form
- مستويان متوازيان Parallel planes
- مستويان متعامدان Perpendicular planes
- مستويان متقاطعان Interecting planes
- زاوية Angle

الأدوات والوسائل

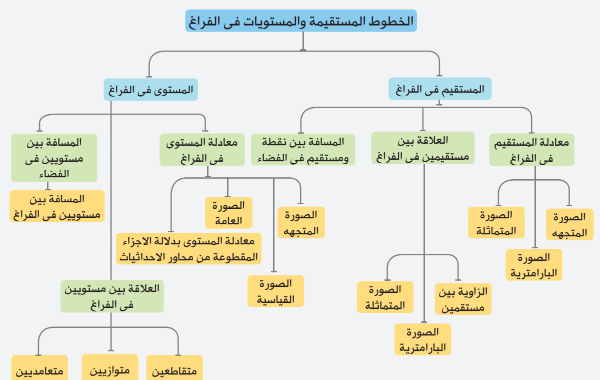
- آلة حاسبة بيانية.
- برامج رسومية ثلاثية الأبعاد.

دروس الوحدة

الدرس (٢ - ١): معادلة المستقيم فى الفراغ.

الدرس (٢ - ٢): معادلة المستوى فى الفراغ.

مخطط تنظيمى للوحدة



١٥٥ كتاب الجبر والهندسة الفراغية - الهندسة الفراغية

٢ - ١ معادلة المستقيم فى الفراغ

Equation of a straight line in space

خلفية:

يهتم هذا الدرس بمعادلة المستقيم وصورها المختلفة فى الفراغ وكيفية إيجاد معادلته وذلك بالاستفادة مما تعلمه فى الأعوام السابقة عن معادلة الخط المستقيم فى المستوى والصور المتجهة والبارامترية والصورة العامة له.

مخرجات الدرس:

فى نهاية هذا الدرس وتنفيذ الأنشطة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف مفهوم متجه اتجاه الخط المستقيم.
- يوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم.
- يوجد الزاوية بين مستقيمين فى الفراغ.
- يحدد المسافة بين نقطة والمستقيم.
- يستنتج الشروط اللازمة لتوازى مستقيمين فى الفراغ.
- يستنتج شرط تعامد مستويين في الفراغ.

مفردات اساسية

متجه اتجاه - المعادلة المتجهة المعادلة البارمامترية - المعادلة المتماثلة - زوايا الاتجاه

المواد التعليمية المستخدمة:

سبورة تعليمية - طباشير ملون - برامج رسومية ثلاثية الأبعاد.

طرق التدريس المقترحة:

العرض المباشر - المناقشة - حل المشكلات.

مصادر التعليم:

كتاب الطالب من ص(١٦٤) إلى(١٧٣).

الوحدة الثانية

٢ - ١ معادلة المستقيم فى الفراغ

Equation of a straight Line in space

سوف تتعلم

- متجه اتجاه الخط المستقيم.
- الصورة المختلفة لمعادلة المستقيم.
- الزاوية بين مستقيمين.
- المسافة بين نقطة ومستقيم.
- المستقيمات المتوازية.
- المستقيمات المتعامدة.

مصطلحات أساسية

- متجه اتجاه Direction vector
- المعادلة البارامترية
- المعادلة المتماثلة
- زاويا الاتجاه

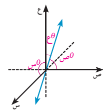
الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسوم حاسوب ثلاثية الأبعاد.

تعلمت فى السنوات السابقة الخط المستقيم فى المستوى وكيفية إيجاد الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم فى المستوى (الصورة المتجهة- الصورة البارامترية- الصورة العامة) وفى هذا الدرس نتعلم المستقيم فى الفراغ وكيفية إيجاد معادلة المستقيم فى الفراغ فى صورها المختلفة لما فى ذلك من أهمية كبيرة فى مجالات الهندسة والتصميم المعمارى وتطبيقات علوم الفضاء.

تعلم

متجه اتجاه المستقيم فى الفراغ *Direction vector of a straight Line in space*



إذا كانت $\theta_{س}$، $\theta_{ص}$، $\theta_{ع}$ هى زوايا اتجاه مستقيم الفراغ

فإن جتا $\theta_{س}$، جتا $\theta_{ص}$، جتا $\theta_{ع}$ هى جيوب تمام الاتجاه لهذا المستقيم وعادة يرمز لها بالرمز ل ، م ، ن.

ل = جتا $\theta_{س}$، م = جتا $\theta_{ص}$، ن = جتا $\theta_{ع}$

ويكون ل^2 + م^2 + ن^2 = ١

ويكون المتجه $\overleftarrow{ى}$ = ل $\overleftarrow{س}$ + م $\overleftarrow{ص}$ + ن $\overleftarrow{ع}$ هو متجه الوحدة فى اتجاه المستقيم.

ويكون أى متجه موازيًا لمتجه الوحدة $\overleftarrow{ى}$ يسمى متجه اتجاه المستقيم ويرمز له بالرمز $\overleftarrow{هـ}$

أى أن $\overleftarrow{هـ}$ = ك (ل $\overleftarrow{س}$ + م $\overleftarrow{ص}$ + ن $\overleftarrow{ع}$) = (أ ، ب، جـ)

حيث أ ، ب ، جـ تتناسب مع ل ، م ، ن ، ك $\in$ ع

أ ، ب ، جـ تسمى نسب اتجاه المستقيم

فمثلًا: إذا كان $(\frac{٢}{٣} ، \frac{١}{٣} ، \frac{٢}{٣})$ هى جيوب تمام الاتجاه المستقيم.

فإن المتجه $\overleftarrow{هـ}$ = ك $(\frac{٢}{٣} ، \frac{١}{٣} ، \frac{٢}{٣})$ يمثل متجه اتجاه المستقيم حيث ك $\neq$ صفر

بوضع ك = ٣ ⟵ $\overleftarrow{هـ}$ = (٢، ١، ٢)

وبوضع ك = -٦ ⟵ $\overleftarrow{هـ}$ = (-٤، -٢، -٤)

أى أن الخط المستقيم له عدد لا نهائى من متجهات الاتجاه المتوازية، وكل منها يوازى هذا المستقيم.

١٥٦ الصف الثالث الثانوى - كتاب الطالب

تهيئة:

- اكتب على السبورة الصور المختلفة لمعادلة خط مستقيم فى المستوى واطلب من الطلاب تحديد المعادلة الخاصة بكل صورة (الصورة العامة - الصورة المتجهة - الصورة البارامترية).

مثال

(١) أوجد متجه الاتجاه للمستقيم المار بالنقطتين أ (-٢ ، ٣، ١) ، ب (٠ ، ٤ ، -٢)

الحل

متجه اتجاه المستقيم = أب = ب - أ = (٠ ، ٤ ، -٢) - (-٢ ، ٣ ، ١)

∴ هـ = (٢ ، ١ ، -٣)

حاول أن تحل

(١) أوجد متجه اتجاه كل من المستقيمات الآتية:

(أ) المستقيم المار بنقطة الأصل والنقطة (-١ ، ٢ ، -٢)

(ب) المستقيم المار بالنقطتين جـ (٠ ، -٢ ، ٣) ، ى (١ ، ١ ، -١)

تفكير ناقد:

١- ماذا يمكن أن تقول عن المستقيم الذى متجه اتجاهه هـ = (أ ، ب ، صفر)

٢- أوجد متجه اتجاه لكل من محاور الإحداثيات.

تعلم

الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم فى الفراغ *Vector form of the equation of astraight Line in space*

إذا كان ل مستقيم فى الفراغ متجه اتجاهه هـ = (أ ، ب ، جـ) ويمر بالنقطة أ متجه موضعها أ = ($س_١$ ، $ص_١$ ، $ع_١$) فإذا كانت النقطة ب أى نقطة على المستقيم متجه موضعها ر = (س ، ص ، ع) فإن

ب (س ، ص ، ع)
أ ($س_١$ ، $ص_١$ ، $ع_١$)
ر
أ
و

من الشكل يكون: ر = أ + أب

ولكن أب // هـ (أب = ك هـ)

∴ ر = أ + ك هـ ⟵ الصورة المتجهة لمعادلة الخط المستقيم.

مثال

(٢) أوجد الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة (٣، -١، ٠) والمتجه (-٢، ٤ ، ٣) متجه اتجاه له.

الحل

(٣ ، -١ ، ٠) تمثل نقطة على المستقيم ∴ أ = (٣ ، -١ ، ٠)

(-٢ ، ٤ ، ٣) يمثل متجه اتجاه المستقيم ∴ هـ = (-٢ ، ٤ ، ٣)

معادلة المستقيم هى ر = أ + ك هـ

∴ ر = (٣ ، -١ ، ٠) + ك (-٢ ، ٤ ، ٣) ⟵ الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم.

عرض الدرس

- فى بند تعلم «متجه اتجاه المستقيم فى الفراغ ارسم امام الطلاب النظام الاحداثى المتعامد ثلاثى الابعاد ووضح عليه زوايا اتجاه المستقيم فى الفراغ (س، ص، ع)
- ساعد الطلاب على تذكر متجه الوحدة فى اتجاه مستقيم وأكد على أن ل، م، ن تشير إلى جيب تمام الاتجاه للمستقيم الموضح وأن العلاقة بينهما هى $ل^٢ + م^٢ + ن^٢ = ١$
- وضح إلى العلاقة بين متجه الوحدة وأى متجه موازى له والذى يطلق عليه متجه اتجاه المستقيم و يرمز له بالرمز هـ وأن ى = (ل س + م ص + ن ع) بينما هـ = (ل س + م ص + ن ع) = (أ ، ب ، جـ) حيث ا، ب ، جـ يتناسب مع ل ، م ، ن ، ك وتسمى نسب اتجاه المستقيم
- لتوضيح تلك المفاهيم بشكل تطبيقى ناقش مع الطلاب المثال الموضح ص(١٦٤) حتى يدرك الطلاب أن أى خط مستقيم له عدد لانهائى من متجهات الاتجاه المتوازية وكل منها يوازى هذا المستقيم، ولتدريب الطلاب على إيجاد متجه اتجاه المستقيم اعرض عليهم المثال الموضح ص(١٥٧).

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

١ـ فى بند حاول أن تحل:

- ساعد الطلاب فى الوصول إلى الإجابة الصحيحة

تفكير ناقد:

- يؤكد النشاط على العلاقة بين صور الخط المستقيم فى الفراغ والمستوى حيث أن المستقيم فى المستوى يكون الاحداثى العمودى مساويًا صفر.
- تعلم الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم فى الفراغ:
- وضح للطلاب بأن المستقيم يتحدد بنقطه عليه ومتجه اتجاهه ومن خلال البيانات الموضحة ص(١٥٧) ساعد الطلاب فى استيعاب الصورة الموجهة لمعادلة المستقيم فى الفراغ مع التأكيد على أن متجه الاتجاه يوازى المستقيم المحدد.

فى مثال (٢):

ناقش مع الطلاب مثال (٢) وبين إليهم أن الصورة المتجهة لمعادلة مستقيم فى الفراغ تتطلب معرفة كل من :

- متجه اتجاه المستقيم
- نقطة تمر بالخط المستقيم
- المتجه الخاص به وذلك كما هو فى المثال الموضح ص ١٦٥ ونظرًا لامكانية وجود أكثر من متجه موازى للمستقيم المعلوم فإن «ك» تسمى البارامتر ويمكن أن تأخذ قيم حقيقية مختلفة.

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة):

٢- فى بند حاول أن تحل صـ ١٥٨:

- يمكن للطالب ايجاد صورة متجهة لمعادلة المستقيم وباستخدام مفهوم البارامتر أو قيمة ك يمكنه ايجاد نقطة اخرى على هذا المستقيم كما هو موضح فى الحل التالى.

معادلة الخط المستقيم هي:

ر→ = (٤ ، -٢ ، ٥) + ك (١ ، -٢ ، ٢)   عند ك = ١

∴ ر→ = (٤ ، -٢ ، ٥) + (١ ، -٢ ، ٢)

ر→ = (٥ ، -٤ ، ٧)

تعلم المعادلات البارامترية للمستقيم فى الفراغ:

- وضح للطلاب انه فى الدرس الحالى سيتم التعرف على عدة صور للمستقيم فى الفراغ وكذلك العلاقة بين هذه الصور كيفية الاستعانة بأحد الصور لايجاد صور اخرى كما هو موضح صـ ١٥٨ حيث تم الاستعانة بالصورة المتجهة للمستقيم للوصول إلى الصورة البارامترية، اكد على الطلاب أن الصورة البارامترية للمستقيم عبارة عن ثلاثة معادلات على خط المستقيم فى اتجاه المحاور الاحداثية الثلاثية فى بند مثال صـ ١٥٨ وضح للطلاب أنه لايجاد المعادلات البارامترية يتم ايجاد الصورة المتجهة.

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة):

٣- فى بند حاول أن تحل صـ ١٥٨ :

- ساعد الطلاب على الوصول للاجابة الصحيحة.

تعلم المعادلة المتماثلة للخط المستقيم:

- وضح للطلاب العلاقة بين الصورة المتجهة والمعادلات البارامترية والمعادلة المتماثلة للخط المستقيم واكد على أن أ ، ب ، جـ ≠ صفر

الوحدة الثانية: الخطوط المستقيمة والمستويات فى الفراغ

ملحوظة: ك عدد حقيقى لا يعبر عن عدد ثابت وحيد بل يأخذ قيمًا حقيقية مختلفة، ويسمى فى هذه الحالة بارامتر. وعند كل قيمة للبارامتر ك يمكن إيجاد نقطة على المستقيم.

فمثلًا عند ك = ١ فإن ر→ = (١ ، ٣ ، ٣) تمثل متجه موضع نقطة على المستقيم.

وعند ك = ٢ فإن ر→ = (-١ ، ٧ ، ٦) تمثل متجه موضع نقطة أخرى على المستقيم.

حاول أن تحل

(٢) أوجد الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة (٤ ، -٢ ، ٥) والمتجه (١ ، -٢ ، ٢) متجه اتجاه له. ثم أوجد نقطة أخرى على هذا المستقيم.

تعلم

المعادلات البارامترية للمستقيم فى الفراغ *Parametric equations of a straight Line in space*

من المعادلة المتجهة للمستقيم ر→ = أ→ + ك هـ→

وبالتعويض عن ر→ = (س ، ص ، ع)، أ→ = (س١ ، ص١ ، ع١)، هـ→ = (أ ، ب ، جـ)

فإن (س ، ص ، ع) = (س١ ، ص١ ، ع١) + ك (أ ، ب، جـ)

∴ (س = س١ + كأ ، ص = ص١ + ك ب ، ع = ع١ + ك جـ) ⟵ المعادلات البارامترية للخط المستقيم

مثال

(٣) أوجد المعادلات البارامترية للخط المستقيم المار بالنقطة (٢ ، -١ ، ٣) والمتجه (٤ ، -٢ ، ٥) متجه اتجاه له.

الحل

ر→ = (٢ ، -١ ، ٣) + ك (٤ ، -٢ ، ٥) ⟵ الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم

∴ (س ، ص ، ع) = (٢ ، -١ ، ٣) + ك (٤ ، -٢ ، ٥)

∴ س = ٢ + ٤ك ، ص = -١ -٢ك ، ع = ٣ + ٥ ك

حاول أن تحل

(٣) أوجد المعادلات البارامترية للمستقيم المار بنقطة الأصل، والمتجه (-٢ ، ٣، ١) متجه اتجاه له.

تعلم

المعادلة المتماثلة للخط المستقيم *Symmetric equation of a straight Line in space*

من المعادلات البارامترية للخط المستقيم

س = س١ + ك أ، ص = ص١ + ك ب، ع = ع١ + ك جـ   ∴ (س - س١)/أ = ك ، (ص - ص١)/ب = ك ، (ع - ع١)/جـ = ك

∴ (س - س١)/أ = (ص - ص١)/ب = (ع - ع١)/جـ ⟵ الصورة المتماثلة لمعادلة المستقيم

حيث كل من أ ، ب ، جـ لا يساوى الصفر

١٥٨ الصف الثالث الثانوى - كتاب الطالب

معادلة المستقيم فى الفراغ | ٢ - ١

ملحوظة:

١- فى حالة أ = صفر مثلًا فإن الصورة المتماثلة للمستقيم تأخذ الصورة $\text{س} = \text{س}_1$، $\frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{ب}} = \frac{\text{ع} - \text{ع}_1}{\text{جـ}}$

٢- تعلمت فى السنوات السابقة أن معادلة المستقيم فى المستوى هي أ س + ب ص + جـ = ٠ ويظن البعض أن معادلة المستقيم فى الفراغ ستكون أ س + ب ص + جـ ع + ى = ٠ وهذا خطأ شائع حيث إن المعادلة الأخيرة تمثل معادلة مستوى فى الفراغ كما سيتضح ذلك فى الدروس الآتية.

٣- حيث إن نسب الاتجاه أ ، ب ، جـ تتناسب مع جيوب تمام الاتجاه ل، م، ن فإنه يمكن كتابة الصورة المتماثلة لمعادلة المستقيم على الصورة

$$\frac{\text{س} - \text{س}_1}{\text{ل}} = \frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{م}} = \frac{\text{ع} - \text{ع}_1}{\text{ن}}$$

مثال

٤ أوجد الصورة المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، -١ ، ٥) ، (-٣ ، ١ ، ٤).

الحل

متجه اتجاه المستقيم $\overleftarrow{\text{هـ}}$ = (-٣ ، ١ ، ٤) - (٢ ، -١ ، ٥) = (-٥ ، ٢ ، -١)

∴ **الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم** $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (٢ ، -١ ، ٥) + ك (-٥ ، ٢ ، -١)

المعادلات البارامترية س = ٢ - ٥ك ، ص = -١ + ٢ك ، ع = ٥ - ك

الصورة المتماثلة $\frac{\text{س} - 2}{-5} = \frac{\text{ص} + 1}{2} = \frac{\text{ع} - 5}{-1}$

حاول أن تحل

٤ أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٢ ، ٠) ، (-١ ، ٣ ، ٤)

مثال

٥ أوجد الصورة المختلفة لمعادلة المستقيم $\frac{3\text{س} + 1}{2} = \frac{\text{ص} - 1}{2} = \frac{5 - \text{ع}}{3}$

الحل

نفرض $\frac{3\text{س} + 1}{2} = \frac{\text{ص} - 1}{2} = \frac{5 - \text{ع}}{3} = \text{ك}$

∴ $\frac{3\text{س} + 1}{2} = \text{ك}$ ومنها $\text{س} = \frac{-1}{3} + \frac{2}{3}\text{ك}$

$\frac{\text{ص} - 1}{2} = \text{ك}$ ومنها $\text{ص} = 1 + 2\text{ك}$

$\frac{5 - \text{ع}}{3} = \text{ك}$ ومنها $\text{ع} = 5 - 3\text{ك}$

(المعادلات البارامترية للخط المستقيم)

ومن المعادلات البارامترية يمكن كتابة المعادلة

(س ، ص ، ع) = $(-\frac{1}{3}$ ، ١ ، ٥) + ك $(\frac{2}{3}$ ، ٢ ، -٣)

أى $\overleftarrow{\text{ر}}$ = $(-\frac{1}{3}$ ، ١ ، ٥) + ك $(\frac{2}{3}$ ، ٢ ، -٣) الصورة المتجهة

لاحظ أن: نسب اتجاه المستقيم هى $(\frac{2}{3}$ ، ٢ ، -٣) أو (٢ ، ٦ ، -٩)

كتاب الجبر والهندسة الفراغية - الهندسة الفراغية ١٥٩

- ناقش مع الطلاب الملاحظات الموضحة ص ١٥٩ والمرتبطة بالمعادلة المتماثلة للخط المستقيم فى حالة مساواة ($\text{أ} = \text{ل} \overleftarrow{\text{س}} = \text{جتا}\,\theta_{\text{س}} \overleftarrow{\text{س}}$) للصفر فيتم الحصول على معادلته هما $\text{س} = \text{س}_1$ ، $\frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{ب}} = \frac{\text{ع} - \text{ع}_1}{\text{جـ}}$ ومن خلال تعريف النسب أ ، ب ، جـ يمكن كتابة المعادلة المتماثلة للخط المستقيم كما يلى $\frac{\text{س} - \text{س}_1}{\text{ل}} = \frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{م}} = \frac{\text{ع} - \text{ع}_1}{\text{ن}}$

لتأكيد استيعاب الطلاب للصور الثلاثة المختلفة التى تم دراستها ناقش مع الطلاب المثال الموضح ص ١٦٧ والذى يعرض الصورة المتجهة والمعادلات البارامترية وكذلك الصورة المتماثلة لمعادلة مستقيم يمر بنقطتين.

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة):

٤- فى بند حاول أن تحل صـ ١٦٧ :

ساعد طلابك فى الوصول إلى الاجابة الصحيحة، ويمكنك اعداد تمارين اخرى على نفس المستوى لتدريب الطلاب على الصورة المختلفة للمستقيم.

فى بند مثال صــ ١٥٩:

- ساعد الطلاب على التفكير بطريقة عكسية ووضح لهم كيف يمكنهم البدء من الصورة المتماثلة لمعادلة خط مستقيم والوصول إلى الصورة المتجهة أو المعادلات البارامترية. وذلك من خلال ايجاد قيمة البارامتر (ك) الذى يمكن من خلاله ايجاد المعادلات البارامترية وساعدهم فى كيفية الاستعانة بتلك المعادلات لايجاد الصورة المتجهة.
- وضح لهم ان نسب اتجاه المستقيم هى $(\frac{2}{3}$ ، ٢) -٣) اذا كانت ك = ١ أو (٢ ، ٦ ، -٩) اذا كانت ك = ٣ وهكذا.

حلول:

$\overleftarrow{\text{هـ}}$ = (-١ ، ٣ ، ٤) - (٣ ، ٢ ، ٠) = (-٤ ، ١ ، ٤)

الصورة المتجهة :

$\overleftarrow{\text{ر}}$ = (-١ ،٣ ،٤) + ك (-٤ ، ١ ، ٤)

المعادلة البارامترية:

س = -١ -٤ك ،

ص = ٣ + ك ، ع = ٤ + ٤ك

الصورة المتماثلة :

$$\frac{\text{س} + 1}{-4} + \frac{\text{ص} - 3}{1} = \frac{\text{ع} - 4}{4}$$

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة):

٥- فى بند حاول إن تحل صـ ١٦٠ :

⌑ ساعد الطلاب على الوصول إلى الاجابة الصحيحة ووضح لهم كيف يمكن تحديد احداثيات نقطة تقع عليه كما يلى:

تعلم: الزاوية بين مستقيمين فى الفراغ:

⌑ وضح للطلاب أن الزاوية التى يتم قياسها بين متجهين هى الزاوية الصغرى وساعدهم على الاستعانة بما تم دراسته فى الوحدة السابقة من جيب تمام زاوية متجه معين للوصول إلى إنه يمكن ايجاد الزاوية بين متجهين ل$_1$ ، ل$_2$ من خلال العلاقة

$$\text{جتا هـ} = \frac{|\overrightarrow{\text{هـ}_1} \cdot \overrightarrow{\text{هـ}_2}|}{\|\overrightarrow{\text{هـ}_1}\| \, \|\overrightarrow{\text{هـ}_2}\|}$$

ووضح لهم أنه بمعرفة جيب تمام الاتجاه للمستقيمين (ل$_1$، م$_1$، ل$_1$) (ل$_2$، م$_2$ ، ن$_2$) يمكن الحصول على العلاقة التالية:

جتا هـ = |ل$_1$ ل$_2$ + م$_1$م$_2$ + ن$_1$ ن$_2$|

ولتدريب الطلاب على ايجاد قياس الزاوية بين متجهين فى الفراغ ناقش معهم المثال الموضح صـ ١٦٨مع لفت الانتباه أن المعطيات هى معادلة مستقيمين وكل مستقيم له صورة مختلفة.

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة):

٦- فى بند حاول أن تحل صـ (١٦٠ ، ١٦١)

⌑ وضح للطلاب على أهمية تحديد الصورة المعطاة لمعادلة الخط المستقيم وكيفية الاستفادة منها فى ايجاد صورة اخرى تساعد فى ايجاد الزاوية بين المستقيمين وذلك بالاستعانة بكل من مثال ٦ ، ٧ واستمر فى المناقشة حتي يمكنهم الوصول إلى الاجابة الصحيحة.

تعلم المستقيمان المتوازيان فى الفراغ:

⌑ ناقش مع الطلاب مفهوم توازى مستقيمين فى المستوى وذكرهم بالعلاقة بين أى مستقيم ومتجه الاتجاه الخاص به واكد على انهما متوازيان حتى يتفهم الطلاب شرط توازى مستقيمين هو توازى متجهى اتجاهما وانه يمكن لهذا الشرط أن يتحقق بعدة صور، وان هذه الصورة يمكن الوصول اليها من خلال الصور المختلفة للخط المستقيم التى سبق وتم دراستها،

⌑ الفت انتباه الطلاب الى أن أحد الشروط يكفى أى أن:

$\overrightarrow{\text{هـ}_1} = \text{ك}\,\overrightarrow{\text{هـ}_2}$ أو $\frac{\text{أ}_1}{\text{أ}_2} = \frac{\text{ب}_1}{\text{ب}_2} = \frac{\text{جـ}_1}{\text{جـ}_2}$

حاول أن تحل

٥ أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم $\frac{\text{س}+4}{3} = \frac{2\text{ص}+5}{2} = \frac{4-\text{ع}}{4}$ ثم أوجد نقطة تقع على هذا المستقيم.

تعلم

الزاوية بين مستقيمين فى الفراغ *The angle netween two straight Lines in space*

إذا كان ل$_1$ ، ل$_2$ مستقيمين فى الفراغ متجهى اتجاهيهما $\overrightarrow{\text{هـ}_1}$ = (أ$_1$ ، ب$_1$ ، جـ$_1$) ، $\overrightarrow{\text{هـ}_2}$ = (أ$_2$ ، ب$_2$ ، جـ$_2$) فإن قياس الزاوية الصغرى بين المستقيمين ل$_1$، ل$_2$ تعطى بالعلاقة

$$\text{جتا}\theta = \frac{|\overrightarrow{\text{هـ}_1} \cdot \overrightarrow{\text{هـ}_2}|}{\|\overrightarrow{\text{هـ}_1}\| \, \|\overrightarrow{\text{هـ}_2}\|}$$

و إذا كان (ل$_1$ ، م$_1$ ، ن$_1$)، (ل$_2$ ، م$_2$ ، ن$_2$) هى جيوب تمام الاتجاه للمستقيمين فإن:

جتاθ = |ل$_1$ ل$_2$ + م$_1$ م$_2$ + ن$_1$ ن$_2$|

ل$_1$ ل$_2$ θ

مثال

٦ أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين $\overrightarrow{\text{ر}_1}$ = (٢ ، -١، ٣) + ك$_1$ (-٢ ، ٠ ، ٢)، س = ١ ، $\frac{\text{ص}-4}{3} = \frac{\text{ع}+5}{-3}$

الحل

من معادلة المستقيم الأول $\overrightarrow{\text{هـ}_1}$ = (-٢ ، ٠ ، ٢)

من المعادلات البارامترية للمستقيم الثانى $\overrightarrow{\text{هـ}_2}$ = (٠ ، ٣ ، -٣)

$\therefore \text{جتا}\theta = \frac{|\overrightarrow{\text{هـ}_1} \cdot \overrightarrow{\text{هـ}_2}|}{\|\overrightarrow{\text{هـ}_1}\| \, \|\overrightarrow{\text{هـ}_2}\|} = \frac{|(-2 ، 0 ، 2)\cdot(0 ، 3 ، -3)|}{\sqrt{(-2)^2+0^2+2^2}\,\sqrt{0^2+3^2+(-3)^2}}$

$= \frac{6}{\sqrt{8}\,\sqrt{18}} = \frac{1}{2}$ $\therefore \theta = 60°$

حاول أن تحل

٦ أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين

ل$_1$: س = ٢ - ٥ك، ص = ١ - ك ، ع = ٣ + ٤ك ، ل$_2$: $\frac{\text{س}+1}{3} = \frac{2-\text{ص}}{4} = \frac{\text{ع}}{2}$

مثال

٧ أوجد قياس الزاوية بين مستقيمين الذين جيوب تمام اتجاههما هى

$(\frac{5}{13\sqrt{2}} ، \frac{-12}{13\sqrt{2}} ، \frac{1}{\sqrt{2}})$، $(\frac{-3}{5\sqrt{2}} ، \frac{4}{5\sqrt{2}} ، \frac{1}{\sqrt{2}})$

الحل

(ل$_1$، م$_1$، ن$_1$) = $(\frac{5}{13\sqrt{2}} ، \frac{-12}{13\sqrt{2}} ، \frac{1}{\sqrt{2}})$ (ل$_2$، م$_2$، ن$_2$) = $(\frac{-3}{5\sqrt{2}} ، \frac{4}{5\sqrt{2}} ، \frac{1}{\sqrt{2}})$

$\therefore$ جتاθ = |ل$_1$ل$_2$ + م$_1$م$_2$+ ن$_1$ن$_2$|

$= |\frac{5}{13\sqrt{2}} \times \frac{-3}{5\sqrt{2}} + \frac{-12}{13\sqrt{2}} \times \frac{4}{5\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}|$

$= |\frac{-15}{130} + \frac{-48}{130} + \frac{1}{2}| = \frac{1}{65}$

$\therefore \theta = \text{جتا}^{-1}(\frac{1}{65}) = 89° \, 7' \, 6''$

حاول أن تحل

٧ أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين اللذين جيوب تمام اتجاههما هى $(\frac{2}{3} ، \frac{-2}{3} ، \frac{1}{3})$، $(\frac{1}{\sqrt{2}} ، \frac{1}{\sqrt{2}} ، 0)$

تعلم

المستقيمان المتوازيان فى الفراغ *Parallel Lines in space*

إذا كان $\overrightarrow{\text{هـ}_1}$ = (أ$_1$ ، ب$_1$ ، جـ$_1$)، $\overrightarrow{\text{هـ}_2}$ = (أ$_2$ ، ب$_2$ ، جـ$_2$) هما متجها اتجاه المستقيمين ل$_1$، ل$_2$ فإن ل$_1$//ل$_2$ إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{\text{هـ}_1}$ // $\overrightarrow{\text{هـ}_2}$ وهذا الشرط يمكن تحققه بعدة صور مختلفة

١- $\overrightarrow{\text{هـ}_1} = \text{ك}\,\overrightarrow{\text{هـ}_2}$ ٢- $\frac{\text{أ}_1}{\text{أ}_2} = \frac{\text{ب}_1}{\text{ب}_2} = \frac{\text{جـ}_1}{\text{جـ}_2}$ ٣- $\overrightarrow{\text{هـ}_1} \times \overrightarrow{\text{هـ}_2} = \overrightarrow{\text{و}}$

ملحوظة

١- إذا كان المستقيمان متوازيين وكانت نقطة على أحدهما تحقق الآخر فإن المستقيمين منطبقان.

٢- إذا كان $\overrightarrow{\text{هـ}_1}$ لا يوازى $\overrightarrow{\text{هـ}_2}$ فإن ل$_1$، ل$_2$ إما متقاطعان أو متخالفان.

مثال

٨ أثبت أن المستقيمين $\overrightarrow{\text{ر}_1} = \overrightarrow{\text{ص}} + \text{ك}_1(\overrightarrow{\text{س}} + 2\overrightarrow{\text{ص}} - \overrightarrow{\text{ع}})$
$\overrightarrow{\text{ر}_2} = (\overrightarrow{\text{س}} + \overrightarrow{\text{ص}} + \overrightarrow{\text{ع}}) + \text{ك}_2(-2\overrightarrow{\text{س}} - 2\overrightarrow{\text{ص}})$
متقاطعان فى نقطة، وأوجد نقطة تقاطعهما.

الحل

$\overrightarrow{\text{هـ}_1}$ = (١ ، ٢ ، -١) ، $\overrightarrow{\text{هـ}_2}$ = (-٢ ، -٢، ٠)

$\because \frac{\text{أ}_1}{\text{أ}_2} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$ ، $\frac{\text{ب}_1}{\text{ب}_2} = \frac{2}{-2} = -1$ $\therefore \frac{\text{أ}_1}{\text{أ}_2} \neq \frac{\text{ب}_1}{\text{ب}_2}$

$\therefore$ المستقيمان غير متوازيين لإثبات أن المستقيمين متقاطعان فى نقطة نبحث عن قيمة لـ ك$_1$، وقيمة لـ ك$_2$ تجعلان $\overrightarrow{\text{ر}_1} = \overrightarrow{\text{ر}_2}$

$\therefore \overrightarrow{\text{ص}} + \text{ك}_1(\overrightarrow{\text{س}} + 2\overrightarrow{\text{ص}} - \overrightarrow{\text{ع}}) = \overrightarrow{\text{س}} + \overrightarrow{\text{ص}} + \overrightarrow{\text{ع}} + \text{ك}_2(-2\overrightarrow{\text{س}} - 2\overrightarrow{\text{ص}})$ بمساواة المعاملات

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة):

٩- فى بند حاول أن تحل صـ (١٦١) :

¤ وضح للطلاب انه لايجاد نقطة تقاطع مستقيمين فلابد من ايجاد قيمة لكل من ك١ ، ك٢ والتى تجعل ر١ = ر٢ وذلك بمساواة معاملات معادلة المستقيمين، ولاثبات انهما متعامدان فلابد من الاستفادة بما سبق دراسته عن الزاوية بين مستقيمين فى الفراغ، وساعدهم فى الوصول الى الاجابة الصحيحة التالية.

تعلم المستقيمان المتعامدان فى الفراغ:

¤ من خلال مناقشة التمرين السابق والموضح فى بند حاول أن تحل وضح للطلاب انه يمكن اثبات أن مستقيمين متعامدين بطريقة اخرى توظف فيها كل من متجهى اتجاه المستقيمين ومفهوم الضرب القياسى لهما. وضح لهم انه لكى يكون ل١ ⊥ ل٢ فلابد من أن يكون هـ١ • هـ٢ = صفر.

¤ ولتأكيد المفهوم ناقش معهم المثال الموضح صـ (١٦٢) الذى يطلب فيه اثبات أن مستقيمين متعامدين وأيضًا انهما متخالفين.

¤ ساعد الطلاب فى ايجاد متجه الاتجاه مثل مستقيم ثم ايجاد حاصل الضرب القياسى لهما وذلك لاثبات ان الناتج مساويًا للصفر وبالتالى فإن المستقيمان متعامدان.

¤ وضح للطلاب ان مفهوم المستقيمان المتخالفان انه لا يمكن ايجاد قيمة لـ ك١ ، ك٢ تجعل ر١ = ر٢ ويمكن ذلك من خلال مساواة معاملات المعادلتين والتى ينتج عنها ثلاثة معادلات توضح العلاقة بين ك١ ، ك٢ ويحل هذه المعادلات يتضح صعوبة ايجاد قيم ك١ ، ك٢ التى تحقق الشرط السابق وبالتالى هذا يثبت أن المستقيمان متخالفان.

المسافة بين نقطة ومستقيم فى الفراغ:

¤ يوضح مثال ١١ صـ (١٦٣) كيفية ايجاد المسافة بين نقطة ومستقيم فى الفراغ والفت انتباههم إلى انه سيتم الاستعانة بعدد من المفاهيم التى سبق وتم دراستها مثل مسقط متجه على مستقيم ونظرية فيثاغورث ومعيار متجه وغير ذلك من المناهج اللازمة للوصول إلى المطلوب.

¤ من خلال الشكل الموضح يمكن للطلاب عمل تصور لخطوات الحل لايجاد القيمة المجهولة طول (جـ ء) والتى تمثل البعد العمودى من النقطة (جـ) إلى المستقيم أ ب .

الوحدة الثانية: الخطوط المستقيمة والمستويات فى الفراغ

∴ ك١ = ١ - ٢ك٢ ومنها ك١ + ٢ك٢ = ١ (١)
٢ك١ = -٢ك٢ ومنها ك١ + ك٢ = ٠ (٢)
-ك١ = ١ ومنها ك١ = -١ (٣)
بالتعويض من (٣) فى (١) ك٢ = ١
وهذه القيم تحقق المعادلة (٢)
∴ المستقيمان متقاطعان فى نقطة، ويكون متجه موضع نقطة تقاطعهما هو
ر = ص - ١ (س + ٢ ص - ع) = - س - ص + ع أى (-١ ، -١ ، ١)

حاول أن تحل

٨) أثبت أن المستقيمين ر١ = (٣ ، -٣ ، ٥) + ك١ (٠ ، -٥ ، ٥)
ر٢ = (-٢ ، ٣ ، ١) + ك٢ (٥ ، -١ ، -١)
متعامدان ومتقاطعان فى نقطة، وأوجد إحداثيات نقطة تقاطعهما.

تعلم

المستقيمان المتعامدان فى الفراغ *Perpendicular Lines in space*

إذا كان هـ١ = (أ١ ، ب١، جـ١) ، هـ٢ = (أ٢، ب٢، جـ٢) هما متجها اتجاه المستقيمين ل١،ل٢ فإن
ل١ ⊥ ل٢ إذا وفقط إذا كان هـ١ • هـ٢ = ٠

مثال

٩) أثبت أن المستقيمين ر١ = (١ ، ٢، ٤) + ك١ (٢ ، -١ ، ١) ، ر٢ = (١ ، ١ ، ١) + ك٢(-٢ ، ٧ ، ١١) متعامدان ثم بين أن المستقيمين متخالفان.

الحل

هـ١ = (٢ ، -١ ، ١) ⟵ متجه اتجاه المستقيم الأول
هـ٢ = (-٢ ، ٧ ، ١١) ⟵ متجه اتجاه المستقيم الثانى
∴ هـ١ • هـ٢ = (٢ ، -١ ، ١) • (-٢ ، ٧ ، ١١)
= ٢ × (-٢) + (-١) × ٧ + ١ × ١١
= -٤ - ٧ + ١١
= صفر ∴ المستقيمان متعامدان

لإثبات أن المستقيمين متخالفان نثبت أنه لا توجد أى قيم لـ ك١، ك٢ تجعل ر١ = ر٢
أى (١ ، ٢ ، ٤) + ك١ (٢ ، -١ ، ١) = (١ ، ١ ، ١) + ك٢ (-٢ ، ٧ ، ١١) بمساواة المعاملات
∴ ١ + ٢ك١ = ١ - ٢ك٢ ومنها ك١ + ك٢ =٠ (١)
٢ - ك١ = ١ + ٧ك٢ ومنها -ك١ - ٧ك٢ =-١ (٢)
٤ + ك١ = ١ + ١١ك٢ ومنها ك١ - ١١ك٢ =-٣ (٣)

الصف الثالث الثانوى - كتاب الطالب ١٦٢

معادلة المستقيم فى الفراغ ٢ - ١

بحل المعادلتين ١ ، ٢ نحصل على ك١ = $\frac{-١}{٦}$ ، ك٢ = $\frac{١}{٦}$ وهذه القيم لا تحقق المعادلة الثالثة
∴ المستقيمان متخالفان

حاول أن تحل

٩) أثبت أن المستقيمين ر١ = (٣ ، -١ ، ٢) + ك١ (٤ ، ١ ، ٣)، ر٢ = (٠ ، ٤ ، -١) + ك٢ (١ ، -١ ، ٢) متخالفان.

مثال

١٠) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، -١ ، ٣) ويقطع المستقيم ر١ = (١ ، -١ ، ٢) + ك (٢ ، ٢ ، -١) على التعامد.

الحل

نفرض أن المستقيمين متقاطعان فى نقطة جـ
∵ جـ ∈ المستقيم ل١ (المستقيم المعلوم)
∴ جـ يمكن كتابتها على الصورة
جـ (١ + ٢ك ، -١ + ٢ك ، ٢ - ك)
متجه اتجاه ل٢ (المستقيم المطلوب) هو هـ٢ = أجـ = جـ - أ
∴ هـ٢ = (٢ك - ١ ، ٢ك ، -ك -١)
∵ هـ١ = (٢ ، ٢ ، -١)
∵ المستقيمان متعامدان ∴ هـ١ • هـ٢ = ٠
∴ (٢ ، ٢ ، -١) • (٢ك - ١ ، ٢ك ، -ك - ١) = ٠
∴ ٤ك - ٢ + ٤ك + ك + ١ = ٠
∴ ٩ك = ١ ومنها ك = $\frac{١}{٩}$
∴ هـ٢ = ($\frac{-٧}{٩}$ ، $\frac{٢}{٩}$ ، $\frac{-١٠}{٩}$) = (-٧ ، ٢ ، -١٠)
∴ معادلة ل٢ هى ر = (٢ ، -١ ، ٣) + ك٢ (-٧ ، ٢ ، -١٠)

حاول أن تحل

١٠) أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل ويقطع المستقيم ر = (٣ ، ١ ، ٤) + ك (٢ ، ١ ، ٣) على التعامد

مثال (المسافة بين نقطة ومستقيم فى الفراغ)

١١) أوجد البعد العمودى من النقطة (٣ ، -١ ، ٧) للمستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٢ ، -١)، (٠ ، ٣ ، ٥)

الحل

بفرض أ (٢ ، ٢ ، -١)، ب (٠ ، ٣ ، ٥)، جـ (٣ ، -١ ، ٧)
ب جـ = جـ - ب = (٣ ، -١ ، ٧) - (٠ ، ٣ ، ٥) = (٣ ، -٤ ، ٢)
متجه اتجاه المستقيم هـ = ب أ = أ - ب
∴ هـ = (٢ ، -١ ، -٦)

كتاب الجبر والهندسة الفراغية - الهندسة الفراغية ١٦٣

¤ ويمكن العودة إلى ما تم دراسته فى الوحدة السابقة لايجاد (مسقط قيمة على مستقيم).

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة):

١١- فى بند حاول أن تحل صـ ١٦٤ :

¤ اطلب من طلابك التعبير عن التمرين بالرسم وتحديد المعطيات عليه ثم ساعدهم فى الاجابة مع الاستفادة من المثال السابق وساعدهم فى الوصول إلى الاجابة الصحيحة.

اجابة بعض تمارين الدرس الأول من صـ ١٦٤ الى ١٦٥:

(١) $\overleftarrow{ر}$ = (٢ ، -١، ٣) + ك (-١ ، ٤ ، ٢)

(٢) °٩٠   (٣) °٦٠

(٤) $\frac{-١}{\sqrt{١١}}$ (٥) (٢ ، -٢ ، ١)

(٦) أ جتا $\theta_{س}$ = $\frac{-١}{\sqrt{١٤}}$ ، جتا $\theta_{ص}$ = $\frac{٢}{\sqrt{١٤}}$ ،
جتا $\theta_{ع}$ = $\frac{٣}{\sqrt{١٤}}$

ب $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

(٧) أ الصورة المتجهة $\overleftarrow{ر}$ = (٤ ، -٢، ٥) + ك (٢ ، ١، -١)

الصور البارامترية:

س = ٤ + ٢ك ، ص = -٢ + ك ، ع = ٥ -ك

الصورة المتماثلة:

$\frac{س - ٤}{٢}$ + $\frac{ص + ٢}{١}$ + $\frac{ع - ٥}{-١}$

ب الصورة المتجهة:

$\overleftarrow{ر}$ = (٣ ، -١، ٥) + ك (٤ ، -٢ ، ٢)

الصورة البارامترية:

س = ٣ + ٤ك ، ص = -١ -٢ك ، ع = ٥ + ٢ك

الصورة المتماثلة:

$\frac{س - ٣}{٤}$ = $\frac{ص + ١}{-٢}$ = $\frac{ع - ٥}{٢}$

جـ الصورة المتجهة:

$\overleftarrow{ر}$ = (٣، -٢، ٠) + ك (٣ ، -٦ ، -١)

الوحدة الثانية: الخطوط المستقيمة والمستويات فى الفراغ

ب ى هى مقياس مسقط $\overleftarrow{بجـ}$ على المستقيم = $\frac{|\overleftarrow{بجـ} \cdot \overleftarrow{بأ}|}{||\overleftarrow{بأ}||}$

∴ ب ى = $\frac{|(٣، -٤، ٢) \cdot (٢، -١، -٦)|}{\sqrt{٢^٢+(-١)^٢+(-٦)^٢}}$ = $\frac{٢}{\sqrt{٤١}}$

لكن $||\overleftarrow{بجـ}||$ = $\sqrt{٣^٢ + (-٤)^٢ + ٢^٢}$ = $\sqrt{٢٩}$

∴ البعد العمودى جـ ى = $\sqrt{(ب جـ)^٢ + (ب ى)^٢}$ = $\sqrt{٢٩ - \frac{٤}{٤١}}$ = $\sqrt{\frac{١١٨٥}{٤١}}$ ≃ ٥,٣ وحدة

حاول أن تحل

(١١) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٢ ، ١ ، -٤) على المستقيم $\overleftarrow{ب}$ ر = (١، -١، ٢) + ك (٢ ، ٣ ، -٢)

تمـــارين (٢ – ١)

أكمل:

(١) المعادلة المتجهة للمستقيم المار بالنقطة (٢ ، -١ ، ٣) والمتجه (-١ ، ٤ ، ٢) متجه اتجاه له هى ....

(٢) قياس الزاوية بين المستقيمين ٢س = ٣ص = -ع ، ٦س = -ص = -٤ع يساوى ....

(٣) قياس الزاوية بين المستقيمين اللذين نسب اتجاههما هى (١، ١، ٢) ($\sqrt{٣}$ -١، -$\sqrt{٣}$ -١، ٤) يساوى ....

(٤) إذا كانت $\theta_{ع}$ هى الزاوية التى يصنعها المستقيم المار بالنقطة (٣، -١ ، ١) ونقطة الأصل ومحور ع فإن جتا$\theta_{ع}$ = ...

(٥) متجه اتجاه المستقيم المار بالنقطتين (٧ ، -٥ ، ٤)، (٥ ، -٣ ، ٣) هو..................

(٦) أوجد جيوب تمام الاتجاه للمستقيم الذى نسب اتجاهه

أ -١ ، ٢ ، ٣   ب ١ ، ١ ، ١

(٧) أوجد الصورة المختلفة لمعادلة المستقيم.

أ المار بالنقطة (٤ ، -٢ ، ٥) والمتجه $\overleftarrow{هـ}$ = (٢ ، ١ ، -١) متجه اتجاه له.

ب المار بالنقطة (٣ ، -١ ، ٥) ويوازى المتجه $\overleftarrow{أب}$ حيث $\overleftarrow{أب}$ = (٤ ، -٢ ، ٢)

جـ المار بالنقطتين (٣ ، -٢ ، ٠)، (٠ ، ٤ ، ١)

د المار بالنقطة (٣ ، ٢ ، ٥) ويصنع مع الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات زوايا متساوية.

(٨) أوجد المعادلات البارامترية للمستقيم المار بالنقطتين (١ ، -٢ ، ٤)، (٢ ، ٤ ، ١).

١٦٤ الصف الثالث الثانوى - كتاب الطالب

الصور البارامترية:

س = ٣ + ٣ك ، ص = -٢ -٦ك، ع = -ك

الصورة المتماثلة:

$\frac{س - ٣}{٣}$ = $\frac{ص + ٢}{-٦}$ = $\frac{ع}{-١}$

(٨) ∵ $\overleftarrow{ر}$ = (٢، ٤، ١) + ك (١، ٦، -٣)

الصور البارامترية هى:

س = ٢ + ك ، ص = ٤ + ٦ك ، ع = ١ - ٣ك

الصورة المتجهة هي :

$\overleftarrow{ر}$ = (٣، ٢، ٥) + ك ($\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٣}}$)

الصورة المتماثلة :

$\frac{س - ٣}{\frac{١}{\sqrt{٣}}}$ = $\frac{ص - ٢}{\frac{١}{\sqrt{٣}}}$ = $\frac{ع - ٥}{\frac{١}{\sqrt{٣}}}$

٩ إذا كان و→أ = س→ - ٢ص→ + ع→ ، و→ب = - س→ -٣ ع→ ،
و→جـ = ٣ س→ + ص→ - ٢ ع→ ، و→ء = ٨ س→ + ص→ + ٤ ع→ .
أوجد المعادلة المتجهة لكل من المستقيمات
أ المار بالنقطتين أ، ب　　ب المار بالنقطة ء موازيًا ب↔جـ
جـ المار بالنقطة جـ يقطع أ↔ب على التعامد

١٠ أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين
أ ل١ : يمر بالنقتطين (-٣ ، ٢ ، ٤) ، (٢ ، ٥ ، -٢)
ل٢ : يمر بالنقطتين (١ ، -٢ ، ٢) ، (٤ ، ٢ ، ٣)

ب ل١ : ر→ (٢ ، -١ ، ٣) + ك١ (-١ ، ٤ ، ٢)
ل٢ : ر→ = (٠ ، ٢ ، -١) + ك٢ (١ ، ١ ، ٣)

جـ ل١ : ٢س = ٣ص = ٤ع
ل٢ : (س - ١)/٣ = (ص + ٢)/-٢ = ع/-٥

١١ اذكر الشرط (أو الشروط) اللازم لكى يكون المستقيمان
ل١ = س = س١ + أ١ك١ ، ص = ص١ + ب١ك١ ، ع= ع١ + جـ١ك١
ل٢ = س = س٢ + أ٢ك٢ ، ص = ص٢ + ب٢ك٢ ، ع = ع٢ + جـ٢ك٢
أ متوازيان　　ب متعامدان　　جـ متقاطعان فى نقطة

١٢ أوجد المعادلة المتجهة للمستقيم المار بالنقطة أ (١ ، -١ ، ٠) ويوازى المستقيم المار بالنقطتين ب (-٣ ، ٢، ١)، جـ (٢ ، ١ ، ٠) ثم بين أن النقطة ء (-١٤ ، ٢ ، ٣) تقع على المستقيم.

١٣ أوجد قيمة ن التى تجعل المستقيمين ل١ : ر→١ = (٣ ، -١، ن) + ك١ (٤ ، ١، ٣)
ل٢ : س = (ص - ٤)/-١ = (ع + ١)/٢ متقاطعان فى نقطة، وأوجد نقطة تقاطعهما

١٤ اكتشف الخطأ:
أ مجموع مربعات نسب الاتجاه لأى مستقيم يساوى ١
ب جيوب تمام الاتجاه للمستقيم المار بالنقطتين (س١ ، ص١ ، ع١) ، (س٢ ، ص٢ ، ع٢) هى (س٢ - س١ ، ص٢ - ص١ ، ع٢ - ع١)

جـ إذا كان (أ١ ، ب١، جـ١) ، (أ٢ ، ب٢ ، جـ٢) هى نسب الاتجاه للمستقيمين ل١، ل٢ فإن قياس الزاوية بينهما تعطى بالعلاقة جتاθ = |أ١أ٢ + ب١ب٢+ جـ١جـ٢|

٩

أ ر→ = (١ ، -٢، ١) + ك (٢، -٢، ٤)

ب ر→ = (٨ ، ١ ، ٤) + ك (-٤ ، -١ ، ١)

جـ ∵ المعادلة المتجهة للمستقيم أ↔ب هى:

ر→ = (١ ، -٢ ، ١) + ك (٢، -٢، ٤)

∴ (س ، ص ، ع) = (١ + ٢ك ، -٢ - ٢ك ، ١ + ٤ك)

هى أى نقطة تقع على المستقيم أ↔ب

وبفرض أن نقطة تقاطع المستقيم ل المطلوب معادلته والمستقيم أ↔ب هى جـ (١ + ٢ك ، -٢ ، -٢ك ، ١ + ٤ك)

∴ متجه إتجاه ل = (١ + ٢ك ، -٢ - ٢ك ، ١ + ٤ك) - (٣ ، ١ ، -٢)

= (-٢ +٢ك ، -٣ - ٢ك ، ٣ + ٤ك)

∵ المستقيمان ل ، أ↔ب متعامدان

∴ (-٢ + ٢ك ، -٣ - ٢ك ، ٣ + ٤ك) . (٢ ، -٢، ٤) = صفر

∴ -٤ + ٤ك + ٦ + ٤ك + ١٢ + ١٦ ك = صفر

∴ ٢٤ ك = -١٤　　أي أن : ك = ٧/١٢

∴ متجه اتجاه ل =

(-٢ + ٢ (-٧/١٢) ، -٣ - ٢ (-٧/١٢) ، ٣ + ٤ (-٧/١٢))

(-١٩/٦ ، -١١/٦ ، ٢/٣)

١١

أ (أ١ ، ب١، جـ١) = ك (أ٢ ، ب٢ ، جـ٢)

ب (أ١ ، ب١، جـ١). (أ٢ ، ب٢ ، جـ٢) = صفر

أى أن: أ١ أ٢ + ب١ ب٢ + جـ١ جـ٢ = صفر

١٢ المعادلة المتجهة هى:

ر→ = (١ ، -١ ، ٠) + ك (٥ ، -١، -١)

بوضع ك = -٣ تجد أن:

ر→ = (١ ، -١ ، ٠) - ٣ (٥ ، -١ ، -١)

= (-١٤ ، ٢ ، ٣)

أى أن (-١٤ ، ٢ ، ٣) تقع على المستقيم

أو بوضع ر→ = (-١٤ ، ٢ ، ٣)

∴ (-١٤ ، ٢ ، ٣) = (١ ، -١ ، ٠) + ك (٥ ، -١ ، -١)

∴ -١٤ = ١ + ٥ك　　أي أن : ك = -٣

٢ = -١ - ك　　أي أن : ك = -٣

٣= ٠ - ك　　أي أن : ك = -٣

∴ النقطة (-١٤ ، ٢ ، ٣) تقع على المستقيم

الوحدة الثانية

٢ - ٢ معادلة المستوى في الفراغ

the equation of a plane in space

خلفية:

بعد الإنتهاء من دراسة الصور المختلفة للمستقيم فى الفراغ سوف يدرس الطالب فى هذا الدرس الصور المختلفة لمستوى فى الفراغ وذلك باستخدام المفاهيم التى تم دراستها فى الدروس السابقة من الصور المختلفة (قياسية أو عامة - متجهة) وكذلك العلاقة بين المتجهات ومتجهات بالوحدة وغير ذلك من المفاهيم.

مخرجات التعلم:

فى نهاية هذا الدرس وتنفيذ الأنشطة فيه من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف صورة المعادلة المتجهة لمستوى في الفرغ.
- يستنتج الصورة القياسية لمعادلة مستوى فى الفراغ.
- يستنتج المعادلة العامة للمستوى فى الفراغ.
- يوجد قياس الزاوية بين مستويين.
- يتعرف شروط توازى وتعامد مستويين فى الفراغ.
- يوجد المسافة بين نقطة ومستوى.
- يوجد المسافة بين مستويين متوازيين.

مفردات أساسية:

مستوى- مستويان متوازيان - مستويان متعامدان- مستويان متقاطعان - صورة قياسية - صورة عامة- صورة متجهة-زاوية.

المواد التعليمية المستخدمة:

برامج رسومية ثلاثية الابعاد.

طرق التدريس المقترحة:

العرض المباشر- حل المشكلات- التفكير التأملى- التعلم التعاونى.

مصادر التعلم:

كتاب الطالب من صـ (١٦٦) الى صـ (١٧٧).

الوحدة الثانية

٢ - ٢ معادلة المستوى فى الفراغ

The equation of a plane in space

فكر و ناقش

١- إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متجهين متعامدين فإن $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}$ = ...

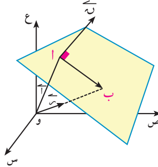
٢- قيمة اتجاه المستقيم المار بالنقطتين $(س_1، ص_1، ع_1)$، $(س_2، ص_2، ع_2)$ هو ....

٣- الإحداثى ع لجميع النقط التى تقع فى المستوى الإحداثى س ص يساوى ....

تعلم

الصورة المتجهة لمعادلة المستوى فى الفراغ

Vector form of the equation of a plane in space



إذا كانت النقطة أ $(س_1، ص_1، ع_1)$ متجه موضعها $\overrightarrow{\text{أ}}$ تقع على المستوى، وكان المتجه $\overrightarrow{\text{ن}}$ = (أ، ب، جـ) متجه اتجاه عمودى على المستوى وكانت ب (س، ص، ع) أى نقطة على المستوى متجه موضعها $\overrightarrow{\text{ر}}$ فإن:

$\overrightarrow{\text{ن}} \cdot \overrightarrow{\text{أب}}$ = صفر

$\therefore \overrightarrow{\text{ن}} \cdot (\overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}}) = ٠$ $(\overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{ر}})$

$\therefore \overrightarrow{\text{ن}} \cdot \overrightarrow{\text{ر}} = \overrightarrow{\text{ن}} \cdot \overrightarrow{\text{أ}}$ ⟵ الصورة المتجهة لمعادلة المستوى.

أى أن: لإيجاد المعادلة المتجهة للمستوى يجب معرفة نقطة على المستوى ومتجه الاتجاه العمودى على المستوى.

مثال

(١) أوجد الصورة المتجهة لمعادلة المستوى المار بالنقطة (٠ ، ١، ١) والمتجه $\overrightarrow{\text{ن}} = \overrightarrow{\text{س}} + \overrightarrow{\text{ص}} + \overrightarrow{\text{ع}}$ عمودى على المستوى.

سوف تتعلم

- المعادلة المتجهه للمستوى فى الفراغ.
- المعادلة القياسية للمستوى فى الفراغ.
- المعادلة العامة للمستوى فى الفراغ.
- الزاوية بين مستويين.
- شرط توازى مستويين.
- شرط تعامد مستويين.
- معادلة خط تقاطع مستويين فى الفراغ.
- المسافة بين نقطة ومستوى.
- المسافة بين مستويين متوازيين.

مصطلحات أساسية

- مستوى plane
- صورة قياسية Standard form
- مستويان متوازيان Parallel planes
- مستويان متعامدان Perpendicular planes
- مستويان متقاطعان Interecting planes
- زاوية Angle

الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسوم حاسوب ثلاثية الأبعاد.

١٦٦ الصف الثالث الثانوى - كتاب الطالب

تهيئة:

اطرح على الطلاب الاسئلة الموضحة فى بند فكر وناقش صـ (١٦٦) واطلب إليهم إكمال الاجابة، وذلك من خلال استدعاء المعلومات السابقة وتقديم التغذية الراجعة منك لتصويب أى مفاهيم خطأ أو مفاهيم غير واضحة لديهم.

الحل

المعادلة والمتجه $\overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{أ}$ حيث $\overrightarrow{أ}$ = (٠ ، ١ ، ١)

∴ (١ ، ١ ، ١) • $\overrightarrow{ر}$ = (١ ، ١ ، ١) • (٠ ، ١ ، ١)

(١ ، ١ ، ١) • $\overrightarrow{ر}$ = ٢

حاول أن تحل

① أوجد الصورة المتجهة لمعادلة المستوى المار بالنقطة (٢ ، -٣ ، ١) والمتجه $\overrightarrow{ن}$ = (١ ، -٢ ، ٣) عمودى على المستوى.

تعلم

الصورة القياسية والصورة العامة لمعادلة المستوى فى الفراغ

Standard form and general form of the equation of a plane in space

من الصورة المتجهة لمعادلة المستوى

$\overrightarrow{ن} \cdot (\overrightarrow{ر} - \overrightarrow{أ})$ = صفر

حيث $\overrightarrow{ن}$ = (أ ، ب ، جـ)، $\overrightarrow{ر}$ = (س ، ص ، ع)، $\overrightarrow{أ}$ = (س١ ، ص١ ، ع١)

∴ (أ ، ب ، جـ) • (س - س١ ، ص - ص١ ، ع - ع١) = صفر

∴ أ(س - س١) + ب (ص - ص١) + جـ (ع - ع١) = ٠ ⟵ الصورة القياسية لمعادلة المستوى

وبفك الأقواس

∴ أس + ب ص + جـ ع + (-أس١ - ب ص١ - جـ ع١) = ٠

وبفرض -أس١ - ب ص١ - جـ ع١ = ء فإن

أ س + ب ص + جـ ع + ء = ٠ ⟵ الصورة العامة لمعادلة المستوى

مثال

② أوجد الصورة القياسية والصورة العامة لمعادلة المستوى المار بالنقطة (٣ ، -٥ ، ٢) والمتجه $\overrightarrow{ن}$ = (٢ ، ١ ، ١) عمودى على المستوى.

الحل

الصورة القياسية أ (س - س١) + ب (ص - ص١) + جـ (ع - ع١) = ٠

∴ ٢ (س - ٣) + (ص + ٥) + (ع - ٢) = ٠ ⟵ الصورة القياسية

وبفك الأقواس وتجميع الحدود المتشابهة

∴ ٢س + ص + ع -٣ = ٠ ⟵ الصورة العامة

حاول أن تحل

② أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقطة (-٣ ، ٤ ، ٢) والمتجه $\overrightarrow{ن}$ = (١ ، -١، ٣) عمودى على المستوى.

عرض الدرس:

تعلم: (الصورة المتجهة لمعادلة المستوى فى الفراغ):

- قبل البدء فى تعريف الطلاب بمعادلة المستوى وضح لهم المقصود بالمستوى وانه يحتوى على عدد من الخطوط المستقيمة والنقاط كما سبق وعند دراسة تقاطع مستقيمين فإنه يمكن دراسة تقاطع مستويين وبنفس الإجراء تم فيه ايجاد معادلة خط مستقيم يمكن ايجاد معادلة مستوى وذلك فى اكثر من صورة (متجهة- عامة- قياسية)
- يمكن استخدام أحد برامج الحاسب الآلى ثلاثية الإبعاد توضيح الشكل الموضح صـ (١٦٦) لتساعد الطلاب على تصور الشكل وكيف أن المستوى يضم نقاط وكيفية تحديد متجه موضع هذه النقاط وكذلك المتجه العمود على هذا المستوى.
- وضح للطلاب أنه لايجاد المعادلة المتجهة لأى مستوى فلابد من تحديد نقطة تقع على هذا المستوى وكذلك متجه الاتجاه العمودى لهذا المستوى ، وذلك من خلال العلاقة $\overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{أ}$ قم بتدريب طلابك على هذه العلاقة بمناقشة المثال الموضح صـ(١٦٦).

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة):

١- فى بند حاول أن تحل صـ (١٦٧) .

- ساعد الطلاب على التدريب على ايجاد الصورة المتجهة لمعادلة المستوى والوصول إلى الاجابة الصحيحة.

تعلم الصورة القياسية و الصورة العامة لمعادلة المستوى فى الفرغ:

- وضح للطلاب انه بالاستعانة بالصورة المتجهة لمعادلة المستوى يمكن الحصول على صورتين لمعادلة المستوى هى الصورة القياسية والصورة العامة واطلب إليهم توظيف معارفهم السابقة للوصول إلى تلك الصور. وللتدريب ناقش معهم المثال الموضح صـ (١٦٧).

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة):

٢- فى بند حاول أن تحل صـ ١٦٧ :

- وضح للطلاب أن مفردة (الصور المختلفة) تعنى ايجاد كافة الصور (المتجهة - القياسية- العامة) لمعادلة المستوى.
- ساعد الطلاب فى الوصول إلى تلك الصور بطريقة صحيحة.

معادلة المستوى المار بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة:

¤ فى المثال الموضح صـ (١٦٨) سيتعلم الطلاب كيفية ايجاد معادلة مستوى دون معرفة اتجاه المتجه العمودى عليه دائما بدلالة ثلاثة نقاط ليست على استقامة واحدة تقع عليه وبالتالى فلابد من ايجاد المتجه العمودى باستخدام حاصل الضرب الاتجاهى لمتجهين فى المستوى.

¤ اكد إلى الطلاب ضرورة التأكد من ذلك النقاط ليست على استقامة واحدة وذلك باثبات أن متجه موضع للمتجهات الواصلة بين هذه النقاط غير متساوية.

¤ راجع مع الطلاب كيفية استخدام المحدد لايجاد حاصل الضرب الاتجاهى لمتجهين ووضح لهم ان ناتج الضرب يعبر عن متجه العمودى على المستوى الذى يحوى هذين المتجهين .

¤ لتوضيح خطوات الحل ناقش مع الطلاب المثال الموضح وخطوات الحل صـ (١٦٨) واطلب إليهم ايجاد الصور المختلفة لمعادلة المستوي بعد أن ثم ايجاد المتجه العمودى وذلك باستخدام أى نقطة من النقاط الثلاثة التى تقع على المستوى واكد إليهم أن المعادلة الخاصة بالمستوى لن تتغير وسيتم الحصول على نفس المعادلة حتي لو اختلفت النقاط التى تنتمى إلى المستوى.

معادلة مستوى يحتوى مستقيمين:

¤ فى بند مثال الموضح صـ (١٦٨) ، صـ(١٦٩) سيتم تعلم كيفية ايجاد معادلة مستوى بدلالة مستقيمين ينتميان لهذا المستوى.

¤ وضح إليهم انه كبداية سنوجد معادلة مستوى يضم مستقيمين متقاطعين ، وهذا معنى أن $\overleftarrow{ر_١} = \overleftarrow{ر_٢}$ وبالتالى بمساواة المعاملات يمكن ايجاد قيمة $ك_١$ ، $ك_٢$ التى تحقق هذه العلاقة وباستخدام الضرب الاتجاهى لمتجهى المستقيمين يمكن الحصول على قيمة الإتجاه العمودى اللازم لايجاد معادلة المستوى سواء فى الصورة المتجهة أو الصورة العامة.

¤ الفت انتباه الطلاب إلى ملحوظة اضف إلى معلوماتك الموضحة صـ (١٦٩) والتى توضح كيفية الحصول على معادلة المستوى المار بثلاثة نقاط باستخدام المحددات وكلف الطلاب المتفوقين فى الفصل بعمل دراسة أو استخدام شبكة المعلومات الدولية (الانترنت) للتحقق من هذه العلاقة، والتدريب على ايجاد مفكوك المحدد على نظم (٤ × ٤).

مثال (معادلة المستوى المار بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة)

٣ أوجد الصورة المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقط (٣ ، -١، ٠) (٢ ، ١ ، ٤) ، (٠ ، ٣ ، ٣).

الحل

أولًا يجب التأكد من أن النقط ليست على استقامة واحدة

بفرض أ (٣ ، -١ ، ٠)، ب (٢ ، ١ ، ٤)، جـ (٠ ، ٣ ، ٣)

$\overleftarrow{أب} = \overleftarrow{ب} - \overleftarrow{أ} = (-١، ٢، ٤)$ ، $\overleftarrow{أجـ} = \overleftarrow{جـ} - \overleftarrow{أ} = (-٣ ، ٤ ، ٣)$

∵ $\frac{-١}{-٣} \neq \frac{١}{٢}$ ∴ $\overleftarrow{أب} \neq \overleftarrow{أجـ}$ ∴ النقط ليست على استقامة واحدة

لإيجاد معادلة المستوى نحتاج متجه اتجاه العمودى على المستوى. وذلك بإيجاد الضرب الاتجاهى للمتجهين $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أجـ}$.

$\overleftarrow{ن} = \overleftarrow{أب} \times \overleftarrow{أجـ} = \begin{vmatrix} \overleftarrow{س} & \overleftarrow{ص} & \overleftarrow{ع} \\ -١ & ٢ & ٤ \\ -٣ & ٤ & ٣ \end{vmatrix} = -١٠ \overleftarrow{س} - ٩ \overleftarrow{ص} + ٢ \overleftarrow{ع}$

ن
جـ
أ
ب

∴ الصورة المتجهة لمعادلة المستوى

$\overleftarrow{ن} \cdot \overleftarrow{ر} = \overleftarrow{ن} \cdot \overleftarrow{أ}$

∴ (-١٠ ، -٩ ، ٢) • $\overleftarrow{ر}$ = (-١٠ ، -٩ ، ٢) • (٣ ، -١، ٠)

∴ (-١٠ ، -٩ ، ٢) • $\overleftarrow{ر}$ = -٢١

الصورة القياسية لمعادلة المستوى

أ (س - $س_١$) + ب (ص - $ص_١$) + جـ (ع - $ع_١$) = ٠ ∴ -١٠ (س - ٣) - ٩ (ص + ١) + ٢ ع = ٠

الصورة العامة لمعادلة المستوى

(-١٠ ، -٩ ، ٢) • (س ، ص، ع) = -٢١ ∴ -١٠س - ٩ص + ٢ ع + ٢١ = ٠

حاول أن تحل

٣ أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقط (١ ، ٠، ٠)، (٠ ، ٢، ٠) ، (٠ ، ٠ ، ٣).

مثال (مستوى يحوى مستقيمين)

٤ أثبت أن المستقيمين $\overleftarrow{ر_١}$ = (٣ $\overleftarrow{س}$ + $\overleftarrow{ص}$ - $\overleftarrow{ع}$) + $ك_١$ ($\overleftarrow{س}$ + ٢ $\overleftarrow{ص}$ + ٣ $\overleftarrow{ع}$)

$\overleftarrow{ر_١}$ = (٢ $\overleftarrow{س}$ + ٥ $\overleftarrow{ص}$) + $ك_٢$ ($\overleftarrow{س}$ - $\overleftarrow{ص}$ + $\overleftarrow{ع}$)

متقاطعان، وأوجد معادلة المستوى الذى يحتو يهما.

الحل

إذا تقاطع المستقيمان فإن $ر_١ = ر_٢$

∴ (٣ $\overleftarrow{س}$ + $\overleftarrow{ص}$ - $\overleftarrow{ع}$) + $ك_١$ ($\overleftarrow{س}$ + ٢ $\overleftarrow{ص}$ + ٣ $\overleftarrow{ع}$) = (٢ $\overleftarrow{س}$ + ٥ $\overleftarrow{ص}$) + $ك_٢$ ($\overleftarrow{س}$ - $\overleftarrow{ص}$ + $\overleftarrow{ع}$)

بمساواة المعاملات نجد أن

٣ + $ك_١$ = ٢ + $ك_٢$ ومنها $ك_١$ - $ك_٢$ = -١ (١)

١ + ٢$ك_١$ = ٥ - $ك_٢$ ومنها ٢$ك_١$ + $ك_٢$ = ٤ (٢)

-١ + ٣$ك_١$ = $ك_٢$ ومنها ٣$ك_١$ - $ك_٢$ = ١ (٣)

بحل المعادلتين ١ ، ٢ $ك_١$ = ١ ، $ك_٢$ = ٢

وبالتعويض بهذه القيم فى المعادلة (٣) نجد أنها تحققها

∴ المستقيمان متقاطعان.

متجه الاتجاه العمودى على المستوى هو $\overleftarrow{ن}$ حيث

$\overleftarrow{ن} = \overleftarrow{هـ_١} \times \overleftarrow{هـ_٢} = \begin{vmatrix} \overleftarrow{س} & \overleftarrow{ص} & \overleftarrow{ع} \\ ١ & ٢ & ٣ \\ ١ & -١ & ١ \end{vmatrix} = ٥ \overleftarrow{س} + ٢ \overleftarrow{ص} - ٣ \overleftarrow{ع}$

المعادلة المتجهة للمستوى $\overleftarrow{ن} \cdot \overleftarrow{ر} = \overleftarrow{ن} \cdot \overleftarrow{أ}$

∴ (٥ ، ٢ ، -٣)• $\overleftarrow{ر}$ = (٥ ، ٢ ، -٣) • (٣ ، ١ ، -١)

∴ (٥ ، ٢ ، -٣) • $\overleftarrow{ر}$ = ٢٠

الصورة العامة

(٥ ، ٢ ، -٣) • (س ، ص ، ع) = ٢٠

∴ ٥س + ٢ص - ٣ ع = ٢٠

أضف إلى معلوماتك

معادلة المستوى المار بالثلاث نقط ($س_١$، $ص_١$، $ع_١$)، ($س_٢$، $ص_٢$، $ع_٢$)، ($س_٣$، $ص_٣$، $ع_٣$) هى:

$\begin{vmatrix} س & ص & ع & ١ \\ س_١ & ص_١ & ع_١ & ١ \\ س_٢ & ص_٢ & ع_٢ & ١ \\ س_٣ & ص_٣ & ع_٣ & ١ \end{vmatrix} = ٠$

حاول أن تحل

٤ أثبت أن المستقيمين $ل_١$: ٢س = ٣ص = ٤ ع، $ل_٢$: ٣س = ٢ص = ٥ ع متقاطعان ثم أوجد معادلة المستوى الذى يحو يهما .

مثال

٥ أوجد نقطة تقاطع المستقيم ٢س = ٣ص -١ = ع -٤ مع المستوى ٣س + ص - ٢ ع = ٥

الحل

من معادلة المستوى ص = ٥ + ٢ ع - ٣س

بالتعويض فى معادلة المستقيم

٢س = ١٤ + ٦ع - ٩س = ع - ٤

١١س - ٦ع = ١٤ (١) -٥ع + ٩س = ١٨ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) نحصل على

س = -٣٨ ، ع = -٧٢

بالتعويض فى معادلة المستوى ∴ ص = - ٢٥

∴ نقطة التقاطع هى (-٣٨ ، -٢٥ ، -٧٢)

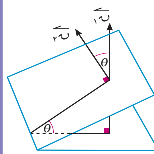
حاول أن تحل

٥ أوجد نقطة تقاطع المستقيم $\vec{ر}$ = (١ ، ٤ ، ٢) + ك (٣ ، ٢ ، ٢) مع المستوى (٣ ، ٢ ، ٢) . $\vec{ر}$ = -٢

تعلم

الزاوية بين مستويين

the angle between two planes



قياس الزاوية بين مستويين هو قياس الزاوية بين متجهى الاتجاه العمودين عليهما. فإذا كان $\vec{ن_1}$ ، $\vec{ن_2}$ هما المتجهين العمودين على المستويين فإن قياس الزاوية بين المستويين تعطى بالعلاقة

$$\text{جتا}\,\theta = \frac{|\vec{ن_1}\cdot\vec{ن_2}|}{\|\vec{ن_1}\|\,\|\vec{ن_2}\|} \quad \text{حيث } 0 \leqslant \theta \leqslant 90^\circ$$

مثال

٦ أوجد قياس الزاوية بين المستويين ل$_1$ = (٢ ، -١ ، ٤) • $\vec{ر}$ = ٥ ، ل$_2$ = ٣س - ص + ٢ع = ٤

الحل

متجه الاتجاه العمودى على المستوى الأول $\vec{ن_1}$ = (٢ ، -١ ، ٤)

متجه الاتجاه العمودى على المستوى الثانى $\vec{ن_2}$ = (٣ ، -١ ، ٢)

∴ قياس الزاوية بين المستويين هى θ حيث

$$\text{جتا}\,\theta = \frac{|\vec{ن_1}\cdot\vec{ن_2}|}{\|\vec{ن_1}\|\,\|\vec{ن_2}\|} = \frac{|(٢ ، -١ ، ٤)\cdot(٣ ، -١ ، ٢)|}{\sqrt{٢^2+(-١)^2+٤^2}\,\sqrt{٣^2+(-١)^2+٢^2}} = \frac{١٥}{٧\sqrt{٦}}$$

$$\therefore \theta = \text{جتا}^{-1}\left(\frac{١٥}{٧\sqrt{٦}}\right) = ٥٨^\circ\ ٢٨'$$

حاول أن تحل

٦ أوجد قياس الزاوية بين المستويين س - ٣ص + ٢ع = ٠ ، ٢س + ص - ع = ٣

المستويان المتوازيان والمستويان المتعامدان

Parallel planes and perpendicular planes

إذا كان $\vec{ن_1}$ ، $\vec{ن_2}$ هما متجهى الاتجاه العموديين على المستويين فإن

١- المستويين متوازيان إذا كان $\vec{ن_1}$ // $\vec{ن_2}$ أى إذا كان $\left(\frac{أ_1}{أ_2} = \frac{ب_1}{ب_2} = \frac{جـ_1}{جـ_2}\right)$

٢- المستويين متعامدان إذا كان $\vec{ن_1}\cdot\vec{ن_2}$ = ٠ أى إذا كان (أ$_1$أ$_2$ + ب$_1$ب$_2$ + جـ$_1$جـ$_2$) = ٠

مثال

٧ إذا كان المستوى ٢س - ص + ك ع = ٥ يوازى المستوى س + ل ص + ٤ع = ١ فما قيمة كل من ك ، ل.

الحل

∵ المستويان متوازيان ∴ $\frac{أ_1}{أ_2} = \frac{ب_1}{ب_2} = \frac{جـ_1}{جـ_2}$

∴ $\frac{٢}{١} = \frac{-١}{ل} = \frac{ك}{٤}$ ∴ ل = $\frac{-١}{٢}$ ، ك = ٨

حاول أن تحل

٧ إذا كان المستوى س - ٣ص + ع = ٤ عمودى على المستوى أ س + ٢ص + ٣ع = ٢ فما قيمة أ

مثال (معادلة خط تقاطع مستويين)

٨ أوجد معادلة خط تقاطع المستويين س + ٢ص - ٢ع = ١ ، ٢ س + ص - ٣ع = ٥

الحل

بحذف س من المعادلتين، وذلك بضرب المعادلة الأولى فى -٢ والجمع

∴ -٣ص + ع = ٣ ومنها ع = ٣ص + ٣ (١)

بحذف ص من المعادلتين، وذلك بضرب المعادلة الثانية فى -٢ والجمع

∴ -٣س + ٤ع = -٩ ومنها ع = $\frac{٣س - ٩}{٤}$

∴ $\frac{٣س - ٩}{٤} = \frac{٣ص + ٣}{١} = \frac{ع}{١}$ معادلة خط التقاطع

حل آخر:

س + ٢ص - ٢ع = ١ (١)

٢س + ص - ٣ع = ٥ (٢)

بحذف س

-٣ص + ع = ٣ (٣)

بفرض ع = ك

(٣) ص = $\frac{ك - ٣}{٣}$ ، (٢) س = $\frac{٩ + ٤ك}{٣}$

∴ المعادلات البارامترية لخط التقاطع هى

س = ٣ + $\frac{٤}{٣}$ ك ، ص = -١ + $\frac{١}{٣}$ ك ، ع = ك

حل ثالث:

خط التقاطع عمودى على المتجهين $\vec{ن_1}$ ، $\vec{ن_2}$ العمودين على المستويين.

∴ متجه اتجاه خط التقاطع $\vec{هـ}$ يمكن حسابه من الضرب الاتجاهى للمتجهين $\vec{ن_1}$ ، $\vec{ن_2}$

$$\vec{هـ} = \vec{ن_1}\cdot\vec{ن_2} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ ١ & ٢ & -٢ \\ ٢ & ١ & -٣ \end{vmatrix} = -٤\,\vec{س} - \vec{ص} - ٣\,\vec{ع}$$

تقاطع مستقيم مع مستوى

- فى المثال الموضح صـ (١٧٠) ناقش للطلاب فى هل يمكن أن يتقاطع مستقيم على مستوى وما هو ناتج ذلك التقاطع وما معنى أن ينتج عن التقاطع نقطة واحدة أو عدة نقاط.
- المثال الموضح فى صـ (١٧٠) يوضح للطلاب كيفية ايجاد احداثيات نقطة التقاطع وذلك اعتمادًا على أن نقطة التقاطع تنتمى الى كل من المستقيم والمستوى وبالتالى فهى تحققها وذكر الطلاب بأن المستقيم يعبر عنه بالمعادلة المتماثلة.

تعلم (الزاوية بين مستويين):

- ناقش الطلاب فى كيفية ايجاد الزاوية بين مستقيمين ومن خلال المناقشة انتقل إلى العلاقة بين المستويين المتقاطعين وكيفية حساب الزاوية بينهما ووضح لهم أنه حتى يمكن حساب قياس تلك الزاوية فإنه يتم حساب الزاوية بين متجهى الاتجاه العمودى لكل منهما.

ووضح لهم العلاقة $\text{جتا}\,\theta = \frac{|\vec{ن_1}\cdot\vec{ن_2}|}{\|\vec{ن_1}\|\,\|\vec{ن_2}\|}$

حيث أن θ محددة $0 \leqslant \theta \leqslant 90^\circ$

- ولمزيد من الاستيعاب ناقش معهم المثال الموضح فى نهاية الصفحة بعد أن يقوم أحد الطلاب بتحديد قيمة الاتجاه العمودى لكل مستوى وذلك من خلال المعادلات المعطاة.

المستويان المتوازيان المتعامدان:

- وضح للطلاب مفهوم المستويان المتوازيان والمستويان المتعامدان وذلك باستخدام السبورة أو أى برنامج حاسب ثلاثى الابعاد ومن خلال الاشكال الموضحة ناقشهم فى العلاقة بين متجهى الاتجاه العمودى لكل منهما وساعدهم فى الوصول الى الشروط الواجب توافرها ليكون متوازين أو متعامدين كما هو موضح فى صـ (١٧١).
- وضح للطلاب أن المثال الموضح صـ (١٧١) اعتمد على مفهوم توازى مستويين لايجاد قيمة لكل من ك ، ل المجهولين وذلك بتطبيق شرط التوازى .

معادلة خط تقاطع مستويين:

- فى المثال صـ ١٧١ رقم (٨) سيتم الطلاب كيفية ايجاد معادلة الخط المستقيم الناتج عن تقاطع مستويين ، يمكن الاستعانة بالشكل الموضح فى صـ(١٧٨) لتوضيح ذلك الخط المستقيم، وضح لهم انه يمكن الحصول على تلك المعادلة من خلال حل معالة المستويين معًا وبالتالى الحصول على الصورة المتماثلة لخط التقاطع كما هو موضح فى طريقة الحل الأول ومن خلال الطريقة الثانية للحل امكن الحصول على المعادلات البارامترية لخط التقاطع كما هو موضح في طريقة الحل الأول

- ومن خلال الطريقة الثانية للحل أمكن الحصول على المعادلات البارامترية لخط التقاطع.
- وضح للطلاب الطريقة الثالثة الموضحة صـ (١٧٢) لايجاد معادلة خط التقاطع والتى تعتمد على ايجاد متجه الاتجاه العمودى على المستويين.

$$\overrightarrow{\text{هـ}} = \overrightarrow{\text{ن}_1} \cdot \overrightarrow{\text{ن}_2}$$

- لإيجاد نقطة تقع على خط التقاطع وذلك بعرض قيمة لـ س والتعويض بها فى معادلات المستويين لايجاد قيمة ص ، ع المناظرين وبالتالى تكون صورة معادلة خط التقاطع المتجه هى:

$$\overrightarrow{\text{ر}} = \overrightarrow{\text{أ}} + \text{ك} \cdot \overrightarrow{\text{هـ}}$$

تعلم طول العمود المرسوم من نقطة إلى مستوى:

- أكد للطلاب بكيفية ايجاد بعد نقطة من مستقيم فى الفراغ وانه تم تحديد هذا البعد باستخدام مفهوم مسقط منه هذه النقطة على المستقيم، ووضح لهم أن هذا المستقيم ينتمى إلى مستوى وبالتالى فيمكن ايجاد البعد بين هذه النقطة والمستوى الذى يحتوى على هذا المستقيم ، ثم اعرض عليهم العلاقة

$$\text{ل} = \frac{|\overrightarrow{\text{ب أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ن}}|}{\|\overrightarrow{\text{ن}}\|}$$

حيث $\overrightarrow{\text{ن}}$ هو متجه الاتجاه العمودى على المستوى.

الصورة الاحداثية لطول العمود المرسوم من نقطة على مستوى:

- استخدم العلاقة التى توضح طول العمود المرسوم نقطة إلى مستوى وكذلك مفهوم المتجه وكيفية اجراء عملية الضرب القياسى بين متجهين ومعيار متجه وكلف الطلاب باستنتاج الصورة الاحداثية كطول العمود المرسوم من نقطة على مستوي كما هو موضح فى كتاب الطالب صـ(١٧٣) وذلك تحت اشرافك ومساعدتهم بتوضيح الصورة العامة لمعادلة المستوى أ س + ب ص + جـ ع + ء = صفر.
- أكد على متباينة ايجاد الصورة العامة لمعادلة المستوى للحصول على طول العمود من خلال تلك العلاقة والتى يطلق عليها الصورة الاحداثية لطول العمود.
- ولمزيد من الفهم اشرح للطلاب المثال الموضح صـ (١٧٤) للتطبيق و يمكنك اضافة تمارين اخرى مع احداثيات النقطة ذو معادلة المستوى.

الوحدة الثانية: الخطوط المستقيمة والمستويات فى الفراغ

لإيجاد نقطة على خط التقاطع نضع س = ١ (مثلًا)

بالتعويض معادلة المستوى الأول ٢ص - ٢ع = صفر (١)

بالتعويض معادلة المستوى الثانى ص - ٣ع = ٣ (٢)

بحل المعادلتين (١)، (٢) نحصل على ع = $-\frac{٣}{٢}$ ، ص = $-\frac{٣}{٢}$

∴ النقطة (١ ، $-\frac{٣}{٢}$ ، $-\frac{٣}{٢}$) تقع على خط التقاطع.

معادلة خط التقاطع $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (١ ، $-\frac{٣}{٢}$ ، $-\frac{٣}{٢}$) + ك (-٤ ، -١ ، -٣)

حاول أن تحل

(٨) أوجد معادلة خط تقاطع المستويين ٣س - ص + ٢ع = ٣ ، س - ٢ص + ٥ع = ٢

تعلم

طول العمود المرسوم من نقطة إلى مستوى *the length of the perpendicular from a point to a plane*

إذا كانت أ (س_1 ، ص_1 ، ع_1) نقطة خارج المستوى س وكانت ب نقطة على المستوى ، $\overrightarrow{\text{ن}}$ متجه الاتجاه العمودى على المستوى فإن بعد النقطة أ عن المستوى يساوى طول مسقط $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ على $\overrightarrow{\text{ن}}$

ن، أ، ل، ب

$$\text{ل} = \frac{|\overrightarrow{\text{ب أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ن}}|}{\|\overrightarrow{\text{ن}}\|}$$

مثال

(٩) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (١ ، -١ ، ٣) على المستوى الذى معادلته $\overrightarrow{\text{ر}}$. (٢ ، ٢ ، -١) = ٥

الحل

يجب إيجاد نقطة على المستوى ومتجه اتجاه العمودى على المستوى من معادلة المستوى $\overrightarrow{\text{ر}}$. (٢ ، ٢ ، -١) = ٥ نجد أن $\overrightarrow{\text{ن}}$ = (٢ ، ٢ ، -١)

ولإيجاد نقطة على المستوى نفرض أن المستوى يقطع محور ع فى النقطة (٠ ، ٠ ، ع)

∴ (٠ ، ٠ ، ع) • (٢ ، ٢ ، -١) = ٥ ومنها ع = -٥

∴ النقطة ب (٠ ، ٠ ، -٥) تقع على المستوى

$\overrightarrow{\text{ب أ}} = \overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ب}}$ = (١ ، -١ ، ٨) حيث أ (١ ، -١ ، ٣)

طول العمود (ل) = $\frac{|\overrightarrow{\text{ب أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ن}}|}{\|\overrightarrow{\text{ن}}\|} = \frac{|(١ ، -١ ، ٨) . (٢ ، ٢ ، -١)|}{\sqrt{٢^٢ + ٢^٢ + (-١)^٢}} = \frac{٨}{٣}$ وحدة

١٧٢ الصف الثالث الثانوى - كتاب الطالب

معادلة المستقيم فى الفراغ ٢ - ٢

حاول أن تحل

(٩) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (-٢ ، ١ ، ٤) على المستوى الذى معادلته $\overrightarrow{\text{ر}}$. (١ ، -٣ ، ٢) = ٤

الصورة الإحداثية لطول العمود المرسوم من نقطة على مستوى

علمت أن طول العمود المرسوم من نقطة أ (س_1 ، ص_1 ، ع_1) على المستوى المار بالنقطة ب (س_2 ، ص_2 ، ع_2) والمتجه $\overrightarrow{\text{ن}}$ = (أ ، ب ، جـ) عمودى على المستوى يعطى بالعلاقة

$$\text{ل} = \frac{|\overrightarrow{\text{ب أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ن}}|}{\|\overrightarrow{\text{ن}}\|}$$

$$\therefore \text{ل} = \frac{|(\text{س}_1 - \text{س}_2 ، \text{ص}_1 - \text{ص}_2 ، \text{ع}_1 - \text{ع}_2) . (\text{أ} ، \text{ب} ، \text{جـ})|}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2 + \text{جـ}^2}}$$

$$= \frac{|\text{أ س}_1 + \text{ب ص}_1 + \text{جـ ع}_1 + (-\text{أ س}_2 - \text{ب ص}_2 - \text{جـ ع}_2)|}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2 + \text{جـ}^2}}$$

∵ النقطة ب (س_2 ، ص_2 ، ع_2) تقع على المستوى أ س + ب ص + حـ ع + ء = ٠

∴ - أ س_2 - ب ص_2 - جـ ع_2 = ء

$$\therefore \text{ل} = \frac{|\text{أ س}_1 + \text{ب ص}_1 + \text{جـ ع}_1 + \text{ء}|}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2 + \text{جـ}^2}}$$ ⟵ الصورة الإحداثية لطول العمود

مثال

(١٠) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (١ ، ٥، -٤) على المستوى الذى معادلته ٣س - ص + ٢ع = ٦.

الحل

$$\text{ل} = \frac{|\text{أ س}_1 + \text{ب ص}_1 + \text{جـ ع}_1 + \text{ء}|}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2 + \text{جـ}^2}} = \frac{|٣(١) - (٥) + ٢(-٤) - ٦|}{\sqrt{٣^٢ + (-١)^٢ + ٢^٢}} = \frac{١٦}{\sqrt{١٤}}$$

حاول أن تحل

(١٠) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (-١ ، ٤ ، ٠) على المستوى الذى معادلته س - ٢ص - ع = ٤

مثال (المسافة بين مستويين متوازيين)

(١١) أثبت أن المستويين س + ٣ص - ٤ ع = ٣ ، ٢س + ٦ص - ٨ع = ٤ متوازيان، وأوجد البعد بينهما.

الحل

لإثبات أن المستويين متوازيان نثبت أن متجهى الاتجاه العموديين عليهما متوازيان.

$\overrightarrow{\text{ن}_1}$ = (١ ، ٣ ، -٤) ، $\overrightarrow{\text{ن}_2}$ = (٢ ، ٦ ، -٨)

∵ $\frac{\text{أ}_1}{\text{أ}_2} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{\text{ب}_1}{\text{ب}_2} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{\text{جـ}_1}{\text{جـ}_2} = \frac{-٤}{-٨} = \frac{١}{٢}$

∴ $\frac{\text{أ}_1}{\text{أ}_2} = \frac{\text{ب}_1}{\text{ب}_2} = \frac{\text{جـ}_1}{\text{جـ}_2}$ ∴ المستويان متوازيان

١٧٣ كتاب الجبر والهندسة الفراغية - الهندسة الفراغية

لإيجاد المسافة بينهما نوجد نقطة على إحداهما، ثم نوجد طول العمود المرسوم من هذه النقطة إلى المستوى الآخر.
لإيجاد نقطة على المستوى الأول نفرض س = ٠ ، ص = ٠

بالتعويض فى معادلة المستوى الأول ∴ ع = $\frac{-٣}{٤}$

∴ النقطة (٠ ، ٠ ، -٤) تقع على المستوى الأول

ويكون طول العمود المرسوم منها للمستوى الثانى هو ل حيث

$$ل = \frac{|٢(٠) + ٦(٠) - ٨(-٤) - ٤|}{\sqrt{٢^٢ + ٦^٢ + (-٨)^٢}} = \frac{١٨}{\sqrt{٢٦}}$$

حاول أن تحل

(١١) أثبت أن المستويين ٣س + ٦ص + ٦ع = ٤ ، س + ٢ص + ٢ع = ١ متوازيان، وأوجد البعد بينهما.

تعلم

معادلة المستوى باستخدام الأجزاء المقطوعة من محاور الإحداثيات

إذا قطع المستوى محاور الإحداثيات فى النقط ($س_١$ ، ٠ ، ٠) ، (٠ ، $ص_١$ ، ٠) (٠ ، ٠ ، $ع_١$) فإن معادلة المستوى تكون على الصورة

$\frac{س}{س_١} + \frac{ص}{ص_١} + \frac{ع}{ع_١} = ١$ ⟵ معادلة المستوى بدلالة الأجزاء المقطوعة من محاور الإحداثيات

استعن بمدرسك لإثبات الصورة السابقة لمعادلة المستوى.

مثال

(١٢) أوجد معادلة المستوى الذى يقطع من محاور الإحداثيات س ، ص ، ع الأجزاء ٢ ، -٣ ، ٥ على الترتيب.

الحل

معادلة المستوى هى $\frac{س}{س_١} + \frac{ص}{ص_١} + \frac{ع}{ع_١} = ١$

أى $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{-٣} + \frac{ع}{٥} = ١$

حاول أن تحل

(١٢) أوجد الأجزاء التى يقطعها المستوى ٢س + ٣ص - ع = ٦ من محاور الإحداثيات.

تفكير ناقد:

إذا قطع المستوى ٣س + ٢ص + ٤ع = ١٢ محاور الإحداثيات س ، ص ، ع فى النقط أ ، ب ، جـ على الترتيب .
احسب مساحة المثلث أ ب ، جـ

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة):

١٠- فى بند حاول أن تحل صـ ١٧٤:

- ساعد الطلاب على الحصول الى الاجابة الصحيحة.

المسافة بين مستويين متوازيين:

- فى المثال رقم ١١ الموضح صـ (١٧٤) ناقش الطلاب فى مفهوم المستويين المتوازيين والربط اللازم ليكون المستويين متوازيين وهو توازى متجهى الاتجاه العمودى لكل منهما وبالتالى فإن $\frac{أ_١}{أ_٢} = \frac{ب_١}{ب_٢} = \frac{جـ_١}{جـ_٢}$
- ولايجاد المسافة بين المستويين المتوازيين يتم استخدام نفس العلاقة التى استخدمت لايجاد المسافة بين نقطة ومستوى آخر على أن تكون هذه النقطة تنتمى الى احد المستويين المتوازيين. ولايجاد هذه النقطة يتم التعويض عن قيمة س ، ص بالصفر وايجاد قيمة ع ثم تطبيق العلاقة الخاصة يطول العمود.
- الفت انتباه الطلاب الى ضرورة تحديد المستوى الذى ينتمى اليه النقطة والمستوى.

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة):

١١- فى بند حاول أن تحل صـ (١٧٤) :

- راجع مع طلابك العلاقة الخاصة بطول العمود الواصل بين مستويين متوازيين والفت انتباههم الى ان الصورة العامة لمعادلة المستوى هى معادلة صفرية حيث:

أ س + ب ص + جـ ع + ى = صفر

وساعدهم فى الوصول إلى الاجابة الصحيحة.

تعلم:

معادلة المستوى باستخدام الاجزاء المقطوعة من محاور الاحداثيات

- لمساعدة الطلاب الوصول إلى المعادلة التى تعبر عن الاجزاء المقطوعة من محاور الاحداثيات كما فى ص(١٧٤) راجع معهم ما سبق وتم شرحه فيما يتعلق بمعادلة مستوى يمر بثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة وباستخدام المتجهات والمحددات يمكن للطلاب الوصول إلى العلاقة

س $ص_١$ $ع_١$ + ص $س_١$ $ع_١$ + ع $س_١$ $ص_١$ = ١

وبالقسمة فى $س_١$ $ص_١$ $ع_١$ تحصل على العلاقة

$$\frac{س}{س_١} + \frac{ص}{ص_١} + \frac{ع}{ع_١} = ١$$

- وأكد على المفهوم من حل المثال الموضح ص(١٧٥)

التقييم المستمر (الحوار والمناقشة)

١٢ـ فى بند حاول أن تحل:

¤ ساعد طلابك فى التفكير بطريقة عكسية والوصول إلى الإجابة الصحيحة.

تفكير ناقد

¤ اطلب من طلابك ذكر الحالات التى سبق وتمت دراستها وامكن من خلالها الحصول على مساحة مثلث أو مساحة مستطيل واترك لهم الفرص للمناقشة للوصول إلى الإجابة الصحيحة.

إجابة تمارين الدرس الثانى من ١٧٥ إلى ١٧٦

(١) جـ   (٢) جـ

(٣) جـ   (٤) ب

(٥) جـ   (٦) ب

(٩) س⃖ • (ر⃖ - أ⃖) = صفر

حيث أ نقطة فى المستوى

∴ (١، ٢، -٣) • (س، ص، ع) = صفر

∴ س + ٢ص - ٣ ع = صفر

(١٠) الصور المتجهة:

∴ ن⃖ • ر⃖ = ن⃖ • أ⃖

حيث أ نقطة فى المستوى

∴ (٤، ١٠، -٧) • ر⃖ = (٤، ١٠، -٧) • (٢، -١، ٠)

∴ (٤، ١٠، -٧) • ر⃖ = -٢   (١)

الصورة القياسية:

(٤، ١٠، -٧) • (س - ٢) ، (ص + ١) ، ع = صفر

∴ ٤ (س - ٢) + ١٠ (ص + ١) - ٧ع = ٠   (٢)

الصورة العامة: س ٢ نجد أن:

٤س - ٨ + ١٠ ص + ١٠ - ٧ع = ٠

∴ ٤س + ١٠ص - ٧ع + ٢ = صفر   (٣)

معادلة المستقيم فى الفراغ   ٢ - ٢

تمارين (٢ - ٢)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(١) أى من النقط تقع فى المستوى ٢ س + ٣ ص - ع = ٥

أ (١ ، ١ ، ١)   ب (١ ، ٢ ، ٠)   جـ (٠ ، ٢ ، ١)   د (٣ ، ٢ ، -١)

(٢) المستوى ٣س - ٢ص + ٤ ع = ١٢ يقطع من محور س جزء طوله

أ ٣   ب -٤   جـ ٤   د ٦

(٣) إذا كانت الأجزاء المقطوعة من محاور الإحداثيات بواسطة المستوى س + ٥ ص - ٦ع = ٣٠ هى أ ، ب ، حـ فإن أ + ب + جـ =

أ صفر   ب ٣٠   جـ ٣١   د ٤١

(٤) معادلة المستوى المار بالنقط (١ ، ٢ ، ٣) ويوازى محور الإحداثيات س ، ص هى

أ س + ص = ٣   ب ع = ٣   جـ س = ١   د ص = ٢

(٥) معادلة المستوى المار بالنقط (٢ ، ٣ ، ٥) ، (-١ ، ٣ ، ١) ، (٤ ، ٣ ، -٢) هى

أ س + ص - ع = ٠   ب س = -١   جـ ص = ٣   د ع = -٢

(٦) معادلة المستوى المار بالنقطة (١ ، -٢ ، ٥) والمتجه (٢ ، ١ ، ٣) عمودى عليه هى

أ ٢س + ص + ٣ع = ١   ب ٢س + ص + ٣ع = ١٥

جـ س - ٢ص + ٥ع = ١٥   د س + ص + ع = ٤

أجب عن الأسئلة الآتية:

(٧) أوجد الصورة المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقطة (١ ، -١ ، ٤) والمتجه ن⃖ = (٢ ، -٣ ، ٤) عمودى عليه ثم بين:

أ هل النقطة (٢ ، ٢ ، ١) تقع فى المستوى؟   ب هل المتجه ى⃖ = (٣ ، -٥ ، -٢) يوازى المستوى؟

(٨) أوجد ثلاث نقط فى الفراغ تقع على كل من المستويات الآتية:

أ س = ٣   ب ص = -٢   جـ س + ٣ص = ٥   د ٢س - ص + ٣ع = ٤

(٩) أوجد الصورة العامة لمعادلة المستوى المار بنقطة الأصل والمتجه ن⃖ = س⃖ + ٢ص⃖ - ٣ ع⃖ عمودى عليه.

(١٠) أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقطة (٢ ، -١ ، ٠) والمتجه ن⃖ = ٤ س⃖ + ١٠ ص⃖ - ٧ ع⃖ عمودى عليه.

(١١) أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالثلاث نقط أ (٢ ، -١ ، ٠) ب (-١ ، ٣ ، ٤) ، جـ (٣ ، ٠ ، ٢)

(١٢) أثبت أن المستقيم ر⃖ = ع⃖ + ك (٢ س⃖ + ٣ص⃖ + ٤ ع⃖) عمودى على المستوى س + $\frac{٣}{٢}$ ص + ٢ع = ٥

(١٣) أثبت أن النقطة أ (٢ ، ٣ ، ٠) والمستقيم ل: ر⃖ (٣ س⃖ + ص⃖ + ع⃖) + ك (س⃖ - ٢ ص⃖ + ٢ ع⃖) يقعان فى المستوى الذى معادلته ر⃖ . (٢ س⃖ - ع⃖) = ٣

كتاب الجبر والهندسة الفراغية - الهندسة الفراغية   ١٧٥

أو من المعادلة (١) نضع ر⃖ = (س ، ص ، ع)

(١١) بفرض أن ن⃖ هو المتجه العمودى على المستوى:

∴ ن⃖ = أب⃖ × أجـ⃖

=	س⃖	ص⃖	ع⃖
	-٣	٤	٤
	١	١	٢

= -٧ س⃖ + ١٠ ص⃖ - ٧ ع⃖

الصورة المتجهة:

∵ ن⃖ • (ر⃖ - أ⃖) = صفر

∴ (-٧، ١٠، -٧) • (ر⃖ - (٢، -١، ٠)) = صفر

∴ (-٧، ١٠، -٧) • ر⃖ = (-٧، ١٠، -٧) • (٢، -١، ٠)

∴ (-٧، ١٠، -٧) • ر⃖ = -٢٤   (١)

الصورة القياسية:

-٧(س - ٢) + ١٠ (ص + ١) - ٧ (ع - ٠) = صفر   (٢)

الصورة العامة:

من ١ نجد أن:

(-٧، ١٠، -٧) • (س، ص، ع) + ٢٤ = ٠   (٣)

⑭ أوجد معادلة المستوى الذى يمر بالنقطة (٢ ، ١ ، ٤) ويحقق كلًّا من الشروط الآتية:

أ يوازى المستوى ٢س + ٣ص + ٥ع = ١

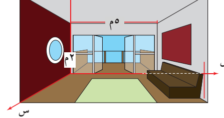
ب عمودى على المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٢ ، ٥) ، (١ ، ٦ ، ٤)

ج عمودى على كل من المستويين ٧س + ص + ٢ع = ٦ ، ٣س + ٥ص - ٦ع = ٨

⑮ أوجد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم ر⃗ = ع⃗ + ك (٢س⃗ + ص⃗ + ع⃗) مع المستوى ر⃗ • س⃗ = ٤

⑯ أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى الذى يقطع من محاور الإحداثيات س ، ص ، ع الأجزاء ٢ ، ٤ ، ٥ على الترتيب.

⑰ الربط بالبيئة: فى الشكل المقابل. أوجد معادلة كل من



أ مستوى أرضية الحجرة.

ب مستوى سقف الحجرة.

ج مستويات الحوائط الجانبية.

⑱ أوجد معادلة المستوى الذى يحتوى المستقيم ل١: ر⃗ = (٠ ، ٣ ، -٥) + ك١ (٦ ، -٢ ، -١) ويوازى المستقيم ل٢ = ر⃗ = (١ ، ٧ ، -٤) + ك٢ (١ ، -٣ ، ٣)

⑲ أوجد قياس الزاوية بين كل زوج من المستويات الآتية:

أ ل١ : ٢س - ص + ع = ٥ ، ل٢: ٣س + ٢ص - ٢ع = ١

ب ل١: ر⃗ • (٢ ، ١ ، -١) = ٤ ، ل٢: ر⃗ • (٣ ، -٢ ، ٠) = ٧

ج ل١ : ص = ٤ ، ل٢: س - ٣ص + ٥ع = ١

أسئلة متعددة المطالب

⑳ إذا كانت النقط أ ، ب ، جـ ، ء فى الفراغ متجهات موضعها بالنسبة لنقطة الأصل هى -ص⃗ + ع⃗ ، ٢س⃗ - ص⃗ + ٣ع⃗ ، -س⃗ - ٢ص⃗ + ٢ع⃗ ، ٧س⃗ - ٤ص⃗ + ٢ع⃗ على الترتيب

أ أوجد متجه الاتجاه العمودى على المستوى أ ب حـ

ب بين طول العمود المرسوم من ء على مستوى أ ب جـ يساوى $٢\sqrt{٦}$

ج بين أن المستويين أ ب جـ ، ء ب جـ متعامدان.

د أوجد معادلة خط تقاطع المستويين أ ب حـ ، و ء ب

㉑ إذا كان المستوى س يحوى النقط أ (١ ، ٤ ، ٢) ب (١ ، ٠ ، ٥)، جـ (٠ ، ٨ ، -١) وكان المستوى ص يحوى النقطة ء (٢ ، ٢ ، ٣) والمتجه ن⃗ = س⃗ + ٢ص⃗ + ٢ع⃗ عمودى عليه أوجد:

أ المعادلة الإحداثية للمستوى س ب المعادلة الإحداثية للمستوى ص

ج إذا كانت النقطة (ط ، ٠ ، ف) تقع فى كل من المستويين س ، ص فما قيمة كل من ط ، ف

د أوجد الصورة المتجهة لخط تقاطع المستويين س ، ص

هـ إذا كانت النقطة (١ ، ١، ق) على أبعاد متساوية من المستويين س ، ص أوجد قيم ق الممكنة.

∴ -٧س + ١٠ص - ٧ع + ٢٤ = ٠

⑫ متجه اتجاه المستقيم أ⃗ = (٢، ٣، ٤)

المتجه العمودى على المستوى ن⃗ = (١، $\frac{٣}{٢}$، ٢)

ونلاحظ أن:

أ⃗ = (٢، ٣، ٤) = ٢ (١، $\frac{٣}{٢}$، ٤)

∴ أ⃗ = ٢ ن⃗ ∴ أ⃗ // ن⃗

∴ أ⃗ (أو المستقيم) عمودى على المستوى

⑭ أ ∵ المستويان متوازيان

∴ المتجه العمودى على كل منهما ن⃗ = (٢، ٣، ٥)

∴ معادلة المستوى المار بالنقطة (٢، ١، ٤):

ن⃗ • (ر⃗ - أ⃗) = ٠

∴ (٢، ٣، ٥) • (س - ٢، ص - ١، ع - ٤) = ٠

٢س - ٤ + ٣ص - ٣ + ٥ع - ٢٠ = صفر

∴ ٢س + ٣ص + ٥ع - ٢٧ = صفر هى المعادلة المطلوبة

ب ∴ المتجه العمودى ن⃗

= (١، ٦، ٤) - (٣، ٢، ٥) = (-٢، ٤، -١)

∴ معادلة المستوى هى:

(-٢، ٤، -١) • (س - ٢، ص - ١، ع - ٤) = ٠

-٢س + ٤ + ٤ص - ٤ - ع + ٤ = ٠

-٢س + ٤ص - ع + ٤ = ٠

أو ٢س - ٤ص + ع - ٤ = ٠ **هى المعادلة المطلوبة**

⑮ ر⃗ = (٢ك، ك، ١ + ك)

∴ (٢ك، ك، ١ + ك) • (١، ٠، ٠) = ٤

∴ ٢ك = ٤ ك = ٢

∴ نقطة تقاطع المستقيم بالمستوى هى: (٤، ٢، ٣)

⑱ ن⃗ = (٦، -٢، -١) × (١، -٣، ٣)

= | س⃗ ص⃗ ع⃗ / ٦ -٢ -١ / ١ -٣ ٣ | = (-٩، -١٩، -١٦)

∴ (٩، ١٩، ١٦) • (س - ٠، ص - ٣، ع + ٥) = صفر

∴ ٩س + ١٩ص - ٥٧ + ١٦ع + ٨٠ = ٠

∴ ٩س + ١٩ص + ١٦ع + ٢٣ = ٠ هى معادلة المستوى

⑲

أ جتا θ = $\frac{|(٢، -١، ١) \bullet (٣، ٢، -٢)|}{\sqrt{٦}\sqrt{١٧}}$ = $\frac{٢}{\sqrt{١٠٢}}$ = ٠,١٩٨٠

∴ θ =

ب جتا θ = $\frac{|(٢، ١، -١) \bullet (٣، -٢، ٠)|}{\sqrt{٦}\sqrt{١٣}}$ = $\frac{٤}{\sqrt{٧٨}}$ = ٠,٤٥٢٩

∴ θ = ٦٣° ٤َ ٤١ً

ج جتا θ = $\frac{|(٠، ١، ٠) \bullet (١، -٣، ٥)|}{\sqrt{١} \times \sqrt{٣٥}}$ = $\frac{٣}{\sqrt{٣٥}}$ = ٠,٥٠٧١

∴ θ = ٥٩° ٣١َ ٤٦ً

⑳ أ⃗ = (٠، -١، ١) ، ب⃗ = (٢، -١، ٣)

جـ⃗ = (-١، -٢، ٢) ، ء⃗ = (٧، -٤، ٢)

أ أب⃗ = (٢، ٠، ٢) ، أجـ⃗ = (-١، -١، ١)

المتجه العمودى على المستوى أ ب جـ =

س	ص	ع
٢	٠	٢
-١	-١	١

∴ ن = (٢، -٤، -٢) = (١، -٢، -١)

ب جـ ء = ء - جـ

= (٧، -٤، ٢) - (-١، -٢، ٢)

= (٨، -٢، ٠)

طول العمود النازل من ء على المستوى أ ب جـ

$\frac{|(٨، -٢، ٠)•(١، -٢، -١)|}{\sqrt{٦}} = \frac{١٢}{\sqrt{٦}} = ٢\sqrt{٦}$

د معادلة المستوى أ ، جـ

(١، -٢، -١)• ر = (١، -٢، -١)•(٠، -١، ١)

∴ س - ٢ص - ع = ١ (١)

لإيجاد معادلة و ء ب:

و ء = (٧، -٤، ٢) ، و ب = (٢، -١، ٣)

المتجه العمودى على المستوى و ء ب =

س	ص	ع
٧	-٤	٢
٢	-١	٣

= (-١٠، -١٧، ١)

∴ (-١٠، -١٧، ١)• ر = (-١٠، -١٧، ١)•(٢، -١، ٣)

-١٠س - ١٧ص + ع = صفر (٢)

بحذف ع من المعادلتين ١، ٢

١٧س - ٤٣ص - ١٧ع = ١٧

، -٢٠س - ٣٤ص + ٢ع = ٠

∴ ٣٧س -١٩ع = ١٧

∴ س = $\frac{١ + ١٩ص}{-٩}$ (٣)

ثم بحذف ص فى المعادلتين ١، ٢

١٧س - ٣٤ص - ١٧ع = ١٧

-٢٠س ـ ٣٤ص = ٢ع = ٠

∴ ٣٧س - ١٩ع = ١٧

∴ س = $\frac{١٧ + ١٩ع}{٣٧}$ (٤)

∴ معادلة المستقيم هى:

$\frac{س}{١} = \frac{١ + ١٩ص}{-٩} = \frac{١٧ + ١٩ع}{٣٧}$

٢١ لإيجاد معادلة المستوى س المار بالنقط أ، ب ، ج:

أ أ ب = (١، ٠، ٥) - (١، ٤، ٢) = (٠، -٤، ٣)

أ جـ = (٠، ٨، -١) - (١، ٤، ٢) = (-١، ٤، -٣)

∴ المتجه العمودى ن =

س	ص	ع
٠	-٤	٣
-١	٤	-٣

= (٠ ، -٣، -٤)

∴ (٠، -٣، -٤)•(س - ١، ص - ٤، ع - ٢) = ٠

-٣ص + ١٢ - ٤ع + ٨ = ٠

٣ص + ٤ع - ٢٠ = ٠ هى معادلة المستوى س١ (١)

ب (١، ٢، ٢) - (س - ٢، ص - ٢، ع - ٣) = صفر

س - ٢ + ٢ص - ٤ + ٢ع - ٦ = ٠

∴ س + ٢ص + ٢ع - ٦ = ٠ هى معادلة المستوى ص ٢ (٢)

جـ النقطة (ط ، ٠، ف) تقع فى المستويين:

بالتعويض فى ١، ٢ ينتج أن:

٣(٠) + ٤ف - ٢٠ = ٠ ف = ٥

ط + ٢(٠) + ٢(٥) - ٦ = ٠ ط = -٤

د لإيجاد معادلة خط تقاطع المستويين س، ص:

∵ ٣ص + ٤ع - ٢٠ = صفر،

، س + ٢ص + ٢ع - ٦ = صفر

∴ ن = (٠، ٣، ٢) متجه عمودى على المستوى س وعلى خط التقاطع

، م = (١، ٢،) متجه عمودى على المستوى ص وعلى خط التقاطع

∴ م × ن هو متجه عمودى على كل من م × ن ويوازى خط التقاطع.

لذا متجه اتجاه المستقيم =

س	ص	ع
٠	٣	٤
٦	٢	٢

= (-٢، ٤، -٣)

تمارين عامة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات:

① معادلة المستقيم المار بالنقطة أ(-١، ٠، ٢) والمتجه $\overrightarrow{هـ}$ = (١، -١، ٣) متجه اتجاه له هى

(أ) $\frac{س-١}{٢}=\frac{ص}{١}=\frac{ع-١}{-١}$ (ب) $\frac{س+١}{١}=\frac{ص}{-١}=\frac{ع-٢}{٣}$

(جـ) $\frac{س-١}{٣}=\frac{ص}{-١}=\frac{ع}{١}$ (د) $\frac{س-١}{١}=\frac{ص-١}{-١}=\frac{ع}{٢}$

② معادلة المستقيم المار بالنقطتين أ(١، -١، ٢) ، ب (-١، ٠، ١) هى

(أ) $\frac{س-١}{٢}=\frac{ص+١}{-١}=\frac{ع-٢}{١}$ (ب) $\frac{س+١}{-٢}=\frac{ص-١}{١}=\frac{ع+٢}{-١}$

(جـ) $\frac{س-٢}{٢}=\frac{ص+١}{٣}=\frac{ع-١}{٢}$ (د) $\frac{س-١}{١}=\frac{ص-٢}{٣}=\frac{ع+١}{١}$

③ قياس الزاوية بين المستقيمين $\frac{س-٣}{٢}=\frac{ع+١}{-٢}$ ، ص = ١، $\frac{س+١}{١}=\frac{ص-٢}{٢}=\frac{ع+١}{-٢}$ تساوى

(أ) ١٥° (ب) ٣٠° (جـ) ٤٥° (د) ٦٠°

④ إذا كان المستقيمان $ل_١$: $\frac{س}{٢}=\frac{ص-١}{-١}=\frac{ع-٢}{م}$ ، $ل_٢$ = $\frac{س-١}{م}=\frac{ص-٢}{١}=\frac{ع}{-١}$ متعامدين . فما قيمة م

(أ) -١ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) -٣

⑤ إذا كان المستقيمان $ل_١$: س = ٢ك - ١، ص = ك + ١، ع = ك - ١، $ل_٢$: س = أك - ١، ص = ٢ك + ١، ع = ب ك - ٢ متوازيين فإن أ + ب =

(أ) ٤ (ب) -٢ (جـ) ٦ (د) -٢

⑥ النقطة (٢، -١، ٣) تقع على المستوى

(أ) س + ص - ع = ٦ (ب) ٢س - ٣ص + ع = -١٠ (جـ) ٣س - ٢ص + ٤ع = ٢٠ (د) س - ٢ص + ٥ع = ٤

⑦ إذا قطع المستوى $\frac{س}{٥}+\frac{ص}{٤}+\frac{ع}{٣}=١$ محاور الإحداثيات فى النقط أ، ب، جـ فإن مساحة △ أ، ب، جـ =

(أ) ١٢ (ب) ١٠ (جـ) ٢٠ (د) ٣٠

⑧ طول العمود من النقطة (٢، ٣، ١) إلى المستوى ٢س - ٢ص + ع = ٥ هو

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

⑨ معادلة خط تقاطع المستويين $ل_١$: ٢س - ص + ع - ١ = ٠، $ل_٢$: س - ٣ص - ع + ٢ = ٠ هى

(أ) $\frac{س+١}{-١}=\frac{ص}{٢}=\frac{ع}{٣}$ (ب) $\frac{س-١}{١}=-\frac{ص}{٣}=\frac{ع-٥}{١}$

(جـ) $\frac{س-٢}{١}=\frac{ص-٣}{-٢}=\frac{ع}{-١}$ (د) $\frac{س-١}{٤}=\frac{ص-١}{٣}=\frac{ع}{٥}$

ولإيجاد نقطة تقع على خط التقاطع نضع ص = ٠ فى معادلتى المستويين

∴ ٣(٠) + ٤ع = ٢٠ ع = ٥

∵ س + ٢ص + ٢ع - ٦ = ٠ ،

∴ س + ٢(٠) + ٢(٥) - ٦ = ٠ س = -٤

النقطة هى (-٤، ٠، ٥)

∴ $\overleftarrow{ى}$ = (-٤، ٠، ٥) + ك (-٢، ٤، -٣) هى الصورة المتجهة لخط التقاطع

هـ) $\frac{|٣(١) + ٤و - ٢٠|}{\sqrt{٢٣ + ٢٤}} = \frac{|(١ + ٢ + ٢و - ٦|}{\sqrt{١ + ٢٢ + ٢٢}}$

∴ المتجة $\frac{|٤و - ١٧|}{٥} = \frac{|٢و - ٣|}{٣}$

∴ ٣ | ٤و - ١٧| = ٥(٢و - ٣) (١)

∴ ٣ | ٤و - ١٧| = ± ٥(٢و - ٣)

∴ ١٢و - ٥١ = ١٠و - ١٥

٢و = ٥١ - ١٥ و = ١٨

أو ٣(٤و - ١٧) = -٥ (٢و - ٣)

١٢و - ٥١ = ١٠و + ١٥

٢٢و = ٥١ + ١٥

و = $\frac{٢٢}{٦٦} = \frac{٢}{٣}$ لاتحقق المعادلة (١)

∴ و = ١٨

إجابات بعض التمارين العامة ص١٨٨ إلى ص١٨٩

① ب ② أ

③ جـ ④ جـ

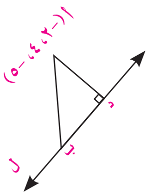
⑤ ٦ ⑥ جـ

⑧ ب ⑨ ى

⑩ ى

⑪ لنفرض أن المستقيم ل معادلته:

$\frac{س+٣}{٣} = \frac{ص-٤}{٥} = \frac{ع+٨}{٦}$



∴ $\overleftarrow{ى}$ = (٣، ٥، ٦)

، أ = (-٢، ٤، -٥) ب = (-٣، ٤، -٨)

$\overrightarrow{أب}$ = (١، ٠، ٣)

∴ ب ى = $\frac{|(٣، ٥، ٦) (١، ٠، ٣)|}{\sqrt{٩ + ٢٥ + ٣٦}} = \frac{٢١}{\sqrt{٧٠}}$

لكن أ ب = $\sqrt{١ + ٠ + ٩} = \sqrt{١٠}$

فى △ أ ى ب القائم فى ى يكون:

أ ى = $\sqrt{١٠ - \frac{٤٤١}{٧٠}}$ = ١,٩

∴ طول العمود = ١,٩ وحدة طول

⑫ ∵ س - ٢ص + ٤ع - ٩ = ٠

∴ طول العمود = $\frac{|٢ - ٢ \times ١ + ٤ \times (-١) - ٩|}{\sqrt{١ + ٤ + ١٦}} = \frac{١٣}{\sqrt{٢١}}$

= ٢,٨ وحدة طول

⑬ معادلة المستقيم

$\overleftarrow{ى}$ = (٣، -٤، -٥) + ك (١، -١، -٦)

أن المستقيم يقطع المستوى فى أ

∴ أ(٣ + ك، -٤ - ك، -٥ - ٦ك) (١)

معادلة المستوى

ن→ = (١، -٢، ٠) × (٢، -٣، -١)

=	س→	ص→	ع→
	١	-٢	٠
	٢	-٣	-١

= (٢، ١، ١)

∴ (٢، ١، ١) • ر→ = (٢، ١، ١) • (٢، ٢، ١)

∴ (٢، ١، ١) • ر→ = ٧ ∵ أ تقع فى المستوى

∴ (٢، ١، ١) • (٣ + ك، -٤ - ك، -٥ - ٦ك) = ٧

٦ + ٢ك - ٤ - ك - ٥ - ٦ك = ٧

-٥ك = ١٠ ك = -٢

∴ نقطة التقاطع أ(١، -٢، ٧)

١٤ ر→ = (٢، -١، ٢) + ك (٣، ٤، ٢)

= (٢ + ٣ك، -١ + ٤ك، ٢ + ٢ك)

∵ ر→ • (١، -١، ١) = ٥

∴ (٢ + ٣ك، -١ + ٤ك، ٢ + ٢ك) • (١، -١، ١) = ٥

٢ + ٣ك + ١ - ٤ك + ٢ + ٢ك = ٥

ك = ٥ - ٥ = ٠

∴ نقطة التقاطع هى (٢، -١، ٢)

١٥ معادلة المستقيم ل:

ى→ = (١، ٢، ٣) + ك (٦، -٤، ٢)

∴ ى→ = (١ + ٦ك، ٢ - ٤ك، ٣ + ٢ك)

لتكن د = (١ + ٦ك، ٢ - ٤ك، ٣ + ٢ك)

∴ أد→ = (١ + ٦ك، -٧ - ٤ك، -٣ + ٢ك)

∵ ى→ = (٦، -٤، ٢) ، أد→ ⊥ ى→

∴ (٦، -٤، ٢) • (١ + ٦ك، -٧ - ٤ك، -٣ + ٢ك) = صفر

٦ + ٣٦ك + ٢٨ + ١٦ك - ٦ + ٤ك = ٠

٥٦ك = -٢٨ ك = $\frac{-١}{٢}$

∴ د(-٢، ٤، ٢)

∴ د(-٩ $\frac{١}{٢}$، -٥، ٦ $\frac{١}{٢}$)

١٦ نعين نقطة فى المستوى:

١٠ المستقيمان ل١: $\frac{س+١}{-١} = \frac{ص-٢}{-١} = \frac{ع-١}{٣}$ ، ل٢: $\frac{س+١}{١} = \frac{ص-٢}{-٢} = \frac{ع-١}{-١}$ يقعان فى المستوى

أ ٣س - ٥ص + ع - ١ = ٠
ب ٥س - ٤ص + ٢ع - ٧ = ٠
جـ ٧س - ٥ص - ع - ٤ = ٠
د ٧س + ٢ص + ٣ع = ٠

أجب عن الأسئلة الآتية:

١١ أوجد بُعد النقطة (-٢، ٤، -٥) عن المستقيم $\frac{س+٣}{٣} = \frac{ص-٤}{٥} = \frac{ع+٨}{٦}$

١٢ أوجد بُعد النقطة (٢، ١، -١) عن المستقيم ر→ • (س→ - ٢ص→ + ٤ع→) = ٩

١٣ أوجد إحداثيات نقطة تقاطع المستوى المار بالنقطتين (٣، -٤، -٥) (٢، -٣، ١) مع المستوى المار بالنقط (٢، ٢، ١) ، (٣، ٠، ١) ، (٤، -١، ٠)

١٤ أوجد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم ر→ = (٢، -١، ٢) + ك (٣، ٤، ٢) مع المستوى ر→ • (١، -١، ١) = ٥

١٥ أوجد مسقط النقطة أ(٠، ٩، ٦) على المستقيم المار بالنقطتين ب (١، ٢، ٣) جـ (٧، -٢، ٥)

١٦ أثبت أن المستويين ٢س + ص + ٢ع = ٨، ٤س + ٢ص + ٤ع + ٥ = ٠ متوازيان، وأوجد البعد بينهما.

تفكير إبداعى

١٧ إذا قطع المستوى محاور الإحداثيات فى النقط أ، ب، جـ وكانت النقطة (س١، ص١، ع١) هى نقطة تقاطع متوسطات المثلث أ ب جـ

أثبت أن معادلة المستوى هى $\frac{س}{س_١} + \frac{ص}{ص_١} + \frac{ع}{ع_١} = ٣$

اختبار تراكمى

أكمل ما يأتى:

١ قياس الزاوية التى يصنعها المستقيم $\frac{س-١}{\sqrt{٢}} = \frac{ص-\sqrt{٢}}{١} = \frac{ع+١}{١}$ مع الاتجاه الموجب لمحور ع تساوى ....

٢ طول العمود المرسوم من النقطة (-١، ٠ ، ١) على المستقيم $\frac{س-١}{٢} = \frac{ص-١}{١} = \frac{ع+١}{-١}$ يساوى ....

٣ المعادلات البارامترية للمستقيم المار بالنقطتين أ(-١، ٠، ٣)، ب(١، -١، ٠) هى ....

٤ قياس الزاوية بين المستقيمين ل١: -س - ص + $\sqrt{٢}$ ع + ١ = ٠، ل٢: س - ص + $\sqrt{٢}$ ع - ٣ = ٠ تساوى ....

٥ معادلة المستوى المار بالنقطة (٢، ٣، -١) والمتجه ن→ = (٥، ٢، -٣) عمودى عليه هى ....

٢س + ص + ٢ع = ٨

نضع س = ص = ٠ ← ع = ٤

∴ (٠، ٠، ٤) نقطة فى المستوى الأول

توجد البعد بين هذه النقطة والمستوى الثانى:

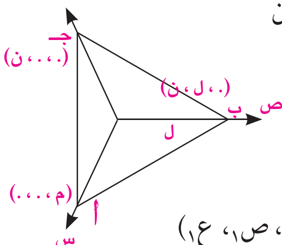
البعد = $\frac{|٤ \times ٠ + ٢ \times ٠ + ٤ \times ٤ + ٥|}{\sqrt{١ + ٢^٢ + ٤^٢}} = \frac{٢١}{\sqrt{٢١}} = \sqrt{٢١}$

١٧ نفرض أن المستوى أ ب جـ يقطع من المحاور س، ص، ع أجزاء طولها على الترتيب م، ل، ن

أ(م، ٠، ٠)،

ب (٠، ل، ٠)،

جـ (٠، ٠، ن)



∴ نقطة تقاطع المتوسطات (س١، ص١، ع١)

= ($\frac{م}{٣}$ ، $\frac{ل}{٣}$ ، $\frac{ن}{٣}$)

$\frac{س}{م} + \frac{ص}{ل} + \frac{ع}{ن} = ١$

∴ نقطة $\frac{س}{٣س_١} + \frac{ص}{٣ص_١} + \frac{ع}{٣ع_١} = ١$

ومنها: $\frac{س}{س_١} + \frac{ص}{ص_١} + \frac{ع}{ع_١} = ٣$

اختبار تراكمى

٦ المستوى ٣س - ٤ص + ع + ١٠ = صفر يقطع من محور ص جزءًا طوله ....

٧ نقطة تقاطع المستقيم $\frac{س + ١}{٢} = \frac{ص - ٢}{١} = \frac{ع}{٣}$ والمستوى س - ٢ص + ٣ع + ٥ = ٠ هى ....

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات:

٨ البعد بين النقطة (أ، ب، جـ) ومحور س يساوى
أ $\sqrt{أ^٢ + جـ^٢}$ ب $\sqrt{أ^٢ + ب^٢}$ جـ $\sqrt{ب^٢ + جـ^٢}$ د $\sqrt{ب^٢ + جـ^٢}$

٩ معادلة محور س فى الفراغ هى
أ س = ٠ ، ص = ٠ ب س = ٠ ، ع = ٠ جـ ص = ٠ ، ع = ٠ د س = ٠

١٠ معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٢، -١، ٣) ، (٠، ٣، ١)
أ $\overleftarrow{ر}$ = (٢، -١، ٣) ك(٢، -٤، ٢) ب $\overleftarrow{ر}$ = (٢، -١، ٣) ك(٢، ٢، ٤)
جـ $\overleftarrow{ر}$ = (٢، -٤، ٢) ك(٢، -١، ٣) د $\overleftarrow{ر}$ • (٢، -٤، ٢) = صفر

١١ النقطة التى تقطع على المستقيم $\overleftarrow{ر}$ = (٢، -١، ٣) + ك (١، ٢، -١)
أ (١، ١، ١) ب (٠، ٢، -٢) جـ (٣، ١، ٢) د (٤، -٣، ٠)

١٢ المسافة بين المستويين ص = ٤، ص = -٢ هى
أ ٣ وحدات ب وحدتان جـ ٦ وحدات د ٨ وحدات

أجب عن الأسئلة الآتية:

١٣ اكتب المعادلة المتماثلة لكل من المستقيمات الآتية:
أ $\overleftarrow{ر}$ = (١، ٣، ٩) + ك (٥، ٤، ٢)
ب المستقيم المار بالنقطة (٠، ٢، ٠) والمتجه $\overleftarrow{هـ}$ = (٣، -١، ٤) متجه اتجاه له

١٤ أوجد قياس الزاوية بين
أ المستقيمين $ل_١$: ٢س = ٣ص - ١ = ع - ٣، $ل_٢$: $\overleftarrow{ر}$ = (٢، -١، ٥) + ك (-١، ١، ٢)
ب المستويين $ل_١$: ٣س - ص = ٥، $ل_٢$ = س - ٢ص = ٤

١٥ أوجد المعادلة الإحداثية للمستوى الذى معادلته (س، ص، ع) = (٢، ٣، ٥) + ك١ (-١، ٣، ٤) + ك٢ (٦، ١، -٢)
حيث ك١، ك٢ بارامترات

١٦ أوجد قياس الزاوية بين المستويين ٢س + ٢ص + ٧ع = ٨
٣س - ٤ص + ٤ع = ٥

كتاب الجبر والهندسة الفراغية - الهندسة الفراغية ١٨١

إجابات بعض تمارين الاختبار التراكمى

١ ٤٥ ٢ ٠,٩٨

٣ س = -١ + ٢ك، ص = -ك، ع = ٣ - ٣ك

٤ ٦٠

٥ ٥س + ٢ص - ٣ع - ١٩ = ٠

٦ ٢,٥ ٧ (-١، ٢، ٠)

٨ جـ ٩ جـ

١٠ أ ١١ جـ

١٢ جـ

١٣
أ س = ١ + ٥ك ، ص = ٣ + ٤ ك ، ع = ٩ + ٢ك
ب س = ٣ك ، ص = ٢ - ك ، ع = ٤ك

١٤

أ

$$جتا\ \theta = \frac{|(٣، ٢، ٦) \bullet (-١، ١، ٢)|}{\sqrt{٤٩}\ \sqrt{٦}} = \frac{١١}{٧\sqrt{٦}} = \theta = ٦ ٥٠^\circ$$

ب

$$جتا\ \theta = \frac{|(٣، -١، ٠) \bullet (١، -٢، ٠)|}{\sqrt{١٠}\ \sqrt{٥}} = \frac{٥}{٥\sqrt{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$$

$\therefore \theta = ٤٥^\circ$

١٥ ∵ (س، ص، ع) = (٢، ٣، ٥) + $ك_١$ (-١، ٣، ٤) + $ك_٢$ (٦، ١، -٢)

فوجد ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة وتقع فى المستوى:

بوضع $ك_١$ = $ك_٢$ = ٠

∴ (س، ص، ع) = (٢، ٣، ٥) لتكن أ (٢، ٣، ٥)

بوضع $ك_١$ = ٠ ، $ك_٢$ = ١

∴ (س، ص، ع) = (٨، ٤، ٣) لتكن أ (٨، ٤، ٣)

بوضع $ك_١$ = ١ ، $ك_٢$ = ٠

∴ (س، ص، ع) = (١، ٦، ٩) لتكن أ (١، ٦، ٩)

∴ $\overleftarrow{أب}$ = (٦، ١، -٢)

$\overleftarrow{أجـ}$ = (-١، ٣، ٤)

وحيث أن $\overleftarrow{أب}$ ≠ ك • $\overleftarrow{أجـ}$

∴ النقاط الثلاث ليست على استقامة واحدة

∴ متجه العمودى على المستوى أ ب جـ

$$\overleftarrow{ن} = \begin{vmatrix} \overleftarrow{س} & \overleftarrow{ص} & \overleftarrow{ع} \\ ٦ & ١ & -٢ \\ -١ & ٣ & ٤ \end{vmatrix} = (١٠، -٢٢، ١٩)$$

∴ (١٠، -٢٢، ١٩) • $\overleftarrow{ر}$ = (١٠، -٢٢، ١٩) • (٢، ٣، ٥)

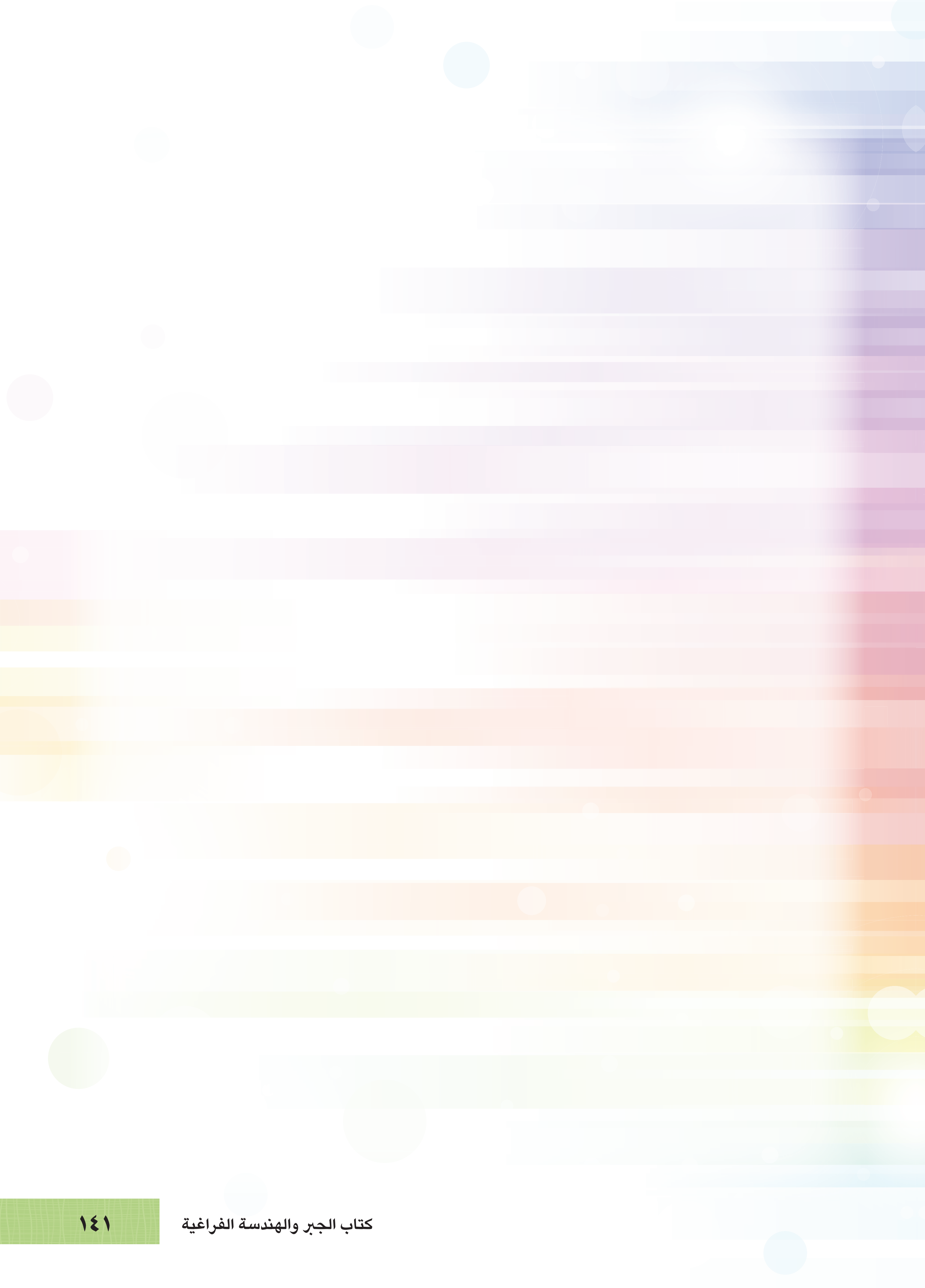
∴ ١٠س - ٢٢ص + ١٩ع = ٤٩ هى المعادلة الإحداثية

١٦

$$جتا\ \theta = \frac{|(٢، ٢، ٧) \bullet (٣، -٤، ٤)|}{\sqrt{٥٧}\ \sqrt{٤١}} = \frac{٢٦}{\sqrt{٥٧}\ \sqrt{٤١}} = ٠,٥٣٧٨$$

$\therefore \theta = ٢٨ ٥٧^\circ$

الملاحق



- Daire, S. and other, Geometry U.S.A, prentice Hall
- Edward D. Gaughan and others, (1982) A*lgebra, Second c*ourse 1982, Scott Foresman.
- Eleanor Beoher and other, *Advanced Algebra*, U.S.A Prentice Hall
- Ernest, H. Richard, *P., (2005) a*nd others, *Introductory mathematical Analysis*, Eleventh Edi*tion,* pearson, prentice Hall.
- G.N YAkovlEv, (1982) *Problem Book in High school mathematics*, Mir Publishers, moscow.
- George, B., Maurice, D., *J*oet, R(*2011). thomas' colulus*, twelfth Edition.
- J.F Talgert and H.H.Heng, (1992) *Addition*al Mathematics, FiFth Editi*on, Lon*gman ingapore publishers *(Ptc*) limited.
- John J . Bradiy and other, A*lgebra, U.S.*A, prentice Hall, Zolo
- Larson, R.(2013). Precalculus, q the *Edition, Brooks cole.*
- *McGraw-Hil*l, (2005). Advanced Mathematical calconcepts: Precalculus with Applications, 1s*t Edition*.
- *Randall I* . Charles and others, (2010) Math Corse 3 . U.S.A, prentice Hall
- Rayner, General D.(1984) Mathemematics, Revision and Practice, Second edition, oxford university press.
- Stewart, J (2012) calculus: Early transcendentals
- Sullivan, M.(1996). Mathematics: An Applied Apprach, 8th Edition, John wileyand sone, inc.
- Sullivan, M., (2015) Trigonometry: A unit circle Approach, pearson education, Canda.
- Vernon, C, Richard, A (2012) college Algebra and trigonometry .

ثانيًا: المواقع الإلكترونية

(http://geogebra.org/com)

(http://www.pedowan.dk)

(http:// www. phschool.com)

www.NCTM.org

http://www.keycurriculum.com/products/ sketchpad

أولًا: الجبر

التباديل	Permutations
التوافيق	Combinations
الرتبة	Rank
العنصر	Element
المصفوفة	Motrix
جذر	root
جذر تربيعى	square root
جذر تكعيبى	cubic root
دائرة الوحدة	Unitcircle
سعة أساسية	principle omplitude
صف	Row
صور مثلثة	Trigonmetric
مبدأ العد	Fundamental counting principle
محدد	Column
محدد	Determinants
محدد الدرجة الثالثة	Third – order determinant
محدد الدرجة الثانية	Second – order determinant
مرافق	conjugate
مرتبة المصفوفة	Rank of a matrix
مستوى أرجاند	Argand diagram
مصفوفات متساوية	Equal matrices
مصفوفة صف	Row matrix
مصفوفة صفرية	Zero matrices
مصفوفة عمود	Column natrix
مصفوفة مربعة	Square matrix
مصفوفة موسعة	Augmented Matrix
معادلة الغير متجانسة	Non Homgenuous equation
معادلة خطية	Linear Equation
معادلة متجانسة	Homogenuous equation
مقياس	Modulus
نظرية ديموافر	demoivres thearem

ثانيًا: الهندسة الفراغية

الشغل	work
الضرب الثلاثى القياسى	scalar trople product
بعد عمودى	Perpendicular distance
ثلاثى الأبعاد	٣D
جيوب تمام الاتجاه	Direction cosines
زاوية	Angle
زوايا اتجاه	Direction angles
صورة قياسية	Standard form
ضرب اتجاهي	vector produvt
ضرب قياسي	scalar product
فراغ	space
قاعدة اليد اليمنى	right hand Rule
قسط	projection
متجه اتجاه	Direction vector
متجه الوحدة	unit vector space
متجه الوضع	positiouvectorin
متجه ثلاثى الرتب	vector trio ranks
مركبة المتجه	component
مستقيمان متخالفان	Skew straight Lines
مستقيمان متعامدان	Perpendicular straight Lines
مستقيمان متقاطعان	Intersecting straight Lines
مستقيمان متوازيان	Parallel straight Lines
مستوى	plane
مستوى	plane
مستويان متعامدان	Perpendicular planes
مستويان متقاطعان	Interecting planes
مستويان متوازيان	Parallel planes
معادلات بارامترية	Parametric equations
معادلة عامة	General equation
معادلة كارتيزية	Cartesian equation
معادلة متجهة	Vector equation
معيار المتجه	the norm of cector
نسب الاتجاه	Direction ratios
يتناسب	Proportional

الوحدة	مخرجات التعلم	الموضوعات	
التباديل والتوافيق ونظرية ذات الحدين	◂ يتعرف مبدأ العد (قاعدة الجمع) ◂ يتعرف العلاقة بين التباديل والتوافيق كأساليب وطرق عد. ◂ يستنتج قوانين ونتائج على التباديل – التوافيق ◂ يستخدم التباديل والتوافيق فى حل مشكلات حياتية فى مجالات مختلفة. ◂ يتعرف نظرية ذات الحدين بأس صحيح موجب. ◂ يستنتج الحد العام فى مفكوك ذات الحدين. ◂ يستنتج النسبة بين كل حد والحد السابق له فى مفكومك ذات الحدين. ◂ يوجد مقابل أى حد فى مفكوك ذات الحدين وفقًا لرتبة هذا الحد. ◂ يوجد معامل أى قوة للمتغير س فى مفكوك (س + ص) ◂ يوجد معامل أكبر حد فى مفكوك ذات الحدين. ◂ يستنتج علاقات بين التوافيق مستخدمًا مفكوك ذات الحدين. ◂ يستنتج العلاقة بين مثلث باسكال ومعاملات مفكوك ذات الحدين. ◂ يستنتج أنماط فى مثلث باسكال. ◂ يحل تطبيقات رياضية وحياتية متنوعه على نظرية ذات الحدين.	الدرس الأول: مبدأ العد - التباديل - التوافيق. الدرس الثانى: نظرية ذات الحدين بأسى صحيح موجب. الدرس الثالث: ايجاد الحد المشتمل على $س^ك$ من مفكوك ذات الحدين. الدرس الرابع: النسبة بين حدين متتاليين من مفكوك ذات الحدين.	
الأعداد المركبة	◂ يحدد المقياس والسعة للعدد المركب. ◂ يتعرف السعة الأساسية للعدد المركب. ◂ يتعرف الصور المثلثية للعدد المركب. ◂ يتعرف نظرية ديموافر وتطبيقاتها. ◂ يستنتج الجذور النونية لأى عدد مركب. ◂ يعبر عن جا ن ء، جتا ن ء بدلالة النسب المثلثية للزاوية ومضاعفاتها. ◂ يتعرف مفكوك جا ء، وجتا ء كمتلسلات. ◂ يستنتج قانون أويلر من خلال المتسلسلات. ◂ يتعرف ويطبق طرق التحويل بين الصور المختلفة للعدد المركب. ◂ يتعرف الجذور التكعيبية للواحد الصحيح. ◂ يتعرف المقياس والسعة لحاصل ضرب عددين مركبين ولخارج قسمتهما. ◂ يجرى العمليات الأساسية على العدد المركب فى الصورة المثلثية. ◂ يحل تطبيقات على الجذور التكعيبية للواحد الصحيح. ◂ يستخدم الأعداد المركبة فى حل المشكلات الرياضية. ◂ يستخدم بعض برامج الحاسوب فى حل مشكلات رياضية تتضمن أعدادًا مركبة. ◂ يستنتج خواص عمليتى الجمع والضرب على الأعداد المركبة. ◂ يستنتج خواص عمليتى الجمع والضرب على الأعداد المركبة. ◂ يستنتج خواص العددين المترافقين. ◂ يستنتج خواص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح	الدرس الأول: الصورة المثلثية للعدد المركب الدرس الثانى: نظرية ديموافر الدرس الثالث: الجذور التكعيبية للواحد الصحيح	

	المفاهيم	استراتيجيات التدريس	أساليب التقويم
	مبدأ العد –التباديل– التوافيق	العرض المباشر – المناقشة – العصف الذهنى – الطريقة الاستنباطية – التعلم التعاونى – حل المشكلات.	تتمثل فى الأسئلة الشفهية والتحريرية الفردية والجماعية فى أثناء الدرس وبعد الدرس والأنشطة المقترحة وسلم التقييم الخاص بكل منها، والتكاليف الجماعية والفردية وتدريبات عامة على الوحدة والاختبار التراكمى فى نهاية الوحدة.
	مستوى أرجاند – مرافق – مقياس – سعة أساسية – صور مثلثة – نظرية ديموافر – جذر –جذر تربيعى – جذر تكعيبى – دائرة الوحدة – قطبى	العرض المباشر – المناقشة – العصف الذهنى – الطريقة الاستنباطية – التعلم التعاونى – حل المشكلات.	تتمثل فى الأسئلة الشفهية والتحريرية الفردية والجماعية قبل وفى أثناء وبعد الدرس والأنشطة المقترحة وسلم التقييم الخاص بكل منها، والاختبار التراكمى فى نهاية كل وحدة.

	الموضوعات	مخرجات التعلم	الوحدة
	الدرس الأول: المحددات الدرس الثانى : المصفوفات الدرس الثالث: حل المعادلات الخطية باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة.	• يستنتج خواص المحددات. • يحل مسائل متنوعة مستخدمًا خواص المحددات. • يعين معكوس مصفوفة مربعة من الرتبة الثالثة باستخدام مصفوفة العوامل المرافقة. • يحل معادلات خطية باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة. • يتعرف المعادلات الخطية المتجانسة وغير المتجانسة. • يعين مرتبة مصفوفة المعاملات ورتبة مصفوفة المعاملات الموسعة. • يستنتج العلاقة بين مرتبة مصفوفة المعاملات ورتبة مصفوفة المعاملات الموسعة وإمكانية الحل.	المحددات والمصفوفات
	الدرس الأول: النظام الإحداثى المتعامد فى ثلاثة أبعاد. الدرس الثانى: المتجهات فى الفراغ. الدرس الثالث: ضرب المتجهات.	• يتعرف النظام الإحداثى ذى الثلاثة أبعاد ويحلل المتجه فى الفراغ. • يوجد المسافة بين نقطتين فى الفراغ وإحداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة فى الفراغ. • يوجد المعادلة الكارتزية للكرة بدلالة إحداثيات المركز وإحداثيات نقطة على الكرة. • يتعرف على المتجهات فى الفراغ من خلال: • تمثيل المتجه بثلاثى مرتب. • متجهات الوحدة الأساسية فى الفراغ $\overrightarrow{س}$ = (١، ٠، ٠)، $\overrightarrow{ص}$ = (٠، ١، ٠)، $\overrightarrow{ع}$ = (٠، ٠، ١). • التعبير عن أى متجه بدلالة متجهات الوحدة الأساسية $\overrightarrow{س}$، $\overrightarrow{ص}$، $\overrightarrow{ع}$ • التعبير عن القطعة المستقيمة الموجهه فى الفراغ بدالة أحداثيات طرفيها. • يتعرف حاصل الضرب القياسى وحاصل الضرب الاتجاهى لمتجهين فى المستوى والفراغ. • يتعرف خواص حاصل الضرب القياسى والاتجاهى لمتجهين فى المستوى والفراغ. • يتعرف النظام الإحداثى ذا الثلاثة أبعاد ويحلل المتجه فى الفراغ. • يوجد المسافة بين نقطتين فى الفراغ. • يوجد إحداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة فى الفراغ. • يوجد المعادلة الكارتزية للكرة. • يتعرف المتجهات فى الفراغ. • يمثل متجهًا ثلاثيًا مرتبًا. • يحدد متجهات الوحدة الأساسية فى الفراغ. • يعبر عن قيمة أى متجه قيمة بدلالة متجهات الوحدة الأساسية. • يعبر عن نقطة سينية موجهة فى الفراغ بدلالة إحداثيات طرفيها.	الهندسة والقياس فى بعدين وثلاثة أبعاد

أساليب التقويم	استراتيجيات التدريس	المفاهيم	
تتمثل فى الأسئلة الشفهية والتحريرية الفردية والجماعية قبل وفى أثناء وبعد الدرس والأنشطة المقترحة وسلم التقييم الخاص بكل منها ، والتكاليف الجماعية والفردية وتدريبات عامة على الوحدة والاختبار التراكمى فى نهاية الوحدة .	العرض المباشر - المناقشة - العصف الذهنى - الاستنباط - حل المشكلات - التعلم التعاونى - مناقشة أبحاث علمية. وهذه الطرق لاتستخدم جميعها فى درس واحد، ولكن بعضها يستخدم فى وقته المناسب من زمن الحصة.	محدد -محدد الدرجة الثانية - محدد الدرجة الثالثة - صف- محدد - المصفوفة - العنصر - مرتبة - مصفوفة صف - مصفوفة عمود - مصفوفة مربعة - مصفوفة صفرية - مصفوفات متساوية- مرتبة المصفوفة -مصفوفة موسعة- معادلة متجانسة- معادلة الغير متجانسة- معادلة خطية	
تتمثل فى الأسئلة الشفهية والتحريرية الفردية والجماعية قبل وأثناء وبعد الدرس ،والأنشطة المقترحة والتكليفات الجماعية والفردية وتدريبات عامة على الوحدة والاختبار التراكمى فى نهاية الوحدة.	العرض المباشر - المناقشة - العصف الذهنى - الطريقة الاستنباطية - حل المشكلات.	فراغ - ثلاثى الأبعاد - مقسط - قاعدة اليد اليمنى -متجه ثلاثى الرتب - مستوى - ضرب قياسي - ضرب اتجاهي - مركبة المتجه - الشغل- الضرب الثلاثى القياسى - متجه الوضع - متجه الوحدة - معيار المتجه	

الوحدة	مخرجات التعلم	الموضوعات	
الخطوط المستقيمة والمستويات فى الفراغ	- يوجد متجه اتجاه الخط المستقيم فى الفراغ. - يوجد المعادلة البارامترية للمستقيم فى الفراغ والمعادلة الاتجاهية للمستقيم فى الفراغ. - يوجد المعادلة المتماثلة الكارتيزية للمستقيم فى الفراغ. - يوجد المعادلة العامة للمستوى فى الفراغ. - يوجد المعادلة القياسية للمستوى فى الفراغ. - يتعرف الزاوية بين مستويين فى الفراغ. - يستنتج شرط تعامد مستويين فى الفراغ. - يستنتج شرط توازى مستويين فى الفراغ. - يوجد معادلة خط تقاطع مستويين فى الفراغ. - يعين المسافة بين نقطة ومستقيم فى الفراغ. - يوجد المسافة بين نقطة ومستوى باستخدام حاصل الضرب القياسى وباستخدام الصورة الكارتيزية. - يعين المسافة بين مستويين متوازيين.	الدرس الأول: معادلة المستقيم فى الفراغ. الدرس الثانى: معادلة المستوى فى الفراغ.	
الاحتمال	- يتعرف مفهوم التجربة العشوائية. - يحل مسائل تطبيقية باستخدام مسلمات الاحتمال. - يحل مشكلات حياتية باستخدام قوانين الاحتمال - يتعرف مفهوم فضاء العينة - يكتب فضاء العينة لبعض التجارب العشوائية - يتعرف مفهوم الحدث - الحدث البسيط - الحدث المؤكد - الحدث المستحيل - يتعرف مفهوم الأحداث المتنافية - يتعرف العمليات على الأحداث مثل (الاتحاد - التقاطع - الفرق - الاكمال) - يتعرف مفهوم الاحتمال - يستخدم مسلمات الاحتمال - يستخدم مسلمات الاحتمال في حساب احتمال وقوع حد.	الدرس الأول: بعض المصطلحات والمفاهيم الأساسية الدرس الثانى: العمليات على الأحداث الدرس الثالث: الاحتمال.	

	المفاهيم	استراتيجيات التدريس	أساليب التقويم
	متجه اتجاه – زوايا اتجاه –جيوب تمام الاتجاه – نسب الاتجاه – معادلة متجهة – معادلات بارامترية – معادلة كارتيزية – معادلة عامة – يتناسب – مستقيمان متوازيان – مستقيمان متعامدان – مستقيمان متقاطعان– مستقيمان متخالفان – بعد عمودى – مستوى– صورة قياسية – مستويان متوازيان– مستويان متعامدان – مستويان متقاطعان – زاوية	العرض المباشر، الحوار والمناقشة، العصف الذهنى، الطرق الاستنباطية، التعلم التعاونى، حل المشكلات، المحاضرة ، اسلوب الاكتشاف.	تتمثل فى الاسئلة الشفهية والتحريرية الفردية والجماعية قبل وبعد واثناء الدرس والانشطة المقترحة وسلم التقييم الخاص بكل منها والاختبارات الجماعية والفردية واختبار الوحدة والاختبار التراكمى فى نهاية الوحدة.
	إحصاء – احتمال – تمثيل البيانات– مخطط الساق والأوراق – وصف البيانات – نزعة مركزية – تشتت – ربيعات – ربيع أدنى – ربيع أعلى – المدى الربيعى – تجربة عشوائية – فضاء العينة – فضاء النواتج – قطعة نقود – حجر نرد – حدث – حدث بسيط (أولى) – حدث مركب – حدث مؤكد – حدث مستحيل – العمليات على الأحداث – أحداث متنافية	التعليم التعاونى – الاكتشاف الموجه – الطريقة الاستنباطية – العصف الذهنى – المناقشة – حل المشكلات.	أسئلة شفهية وتحريرية فردية وجماعية قبل وأثناء وبعد الدرس أو الأنشطة المقترحة – تمارين عامة واختبار تراكمى فى نهاية الوحدة.

أختبار استرشادى — جبر وهندسة فراغية

أولًا: أجب عن سؤال واحد فقط من السؤالين الآتيين:

السؤال الأول: أختر الإجابة الصحيحة من الاجابات المعطاه:

(١) معامل الحد الأوسط فى مفكوك $(٣س - \frac{١}{٦})^{١٠}$ يساوى ....

(أ) $\frac{-٦٣}{٨}$ (ب) $\frac{-٦٧}{٨}$ (ج) $\frac{٦٣}{٨}$ (د) $\frac{٦٧}{٨}$

(٢) إذا كان ${}^{٢٠}X_{ر+١} : {}^{٢٠}X_{ر} = ٤ : ٣$ فإن قيمة ر = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٥

(٣) إذا كان ج (٧، −١، ٨) ، ب (١١، ٢، −٤) فإن طول $\overline{أب}$ = ...سم

(أ) ١٠ (ب) ١١ (ج) ١٢ (د) ١٣)

(٤) رتبة المصفوفة ج = $\begin{pmatrix} ٣ & -٢ & ٠ \\ -٦ & ٤ & -٢ \\ ٩ & -٦ & ٣ \end{pmatrix}$ تساوى ....

(أ) ٣ (ب) ٢ (ج) ١ (د) صفر

(٥) إذا كان $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ج}$ وكان $\overrightarrow{ب}$ = (٢، ٣، ٢)، $\overrightarrow{ج}$ = (١، ٢، ١) فإن $\|\overrightarrow{أ}\|$ = ...

(أ) $\sqrt{٣٣}$ (ب) $٦\sqrt{٢}$ (ج) $٤\sqrt{٢}$ (د) $٢\sqrt{٥}$

(٦) إذا كان للمعادلتين س + ص = ٢ ، ٢س + ك ص = ٤ أكثر من حل فإن ك = ...

(أ) −٢ (ب) −١ (ج) ١ (د) ٢)

السؤال الثانى: أكمل:

(١) إذا كان معاملا $ح_٦$ ، $ح_{١٦}$ فى مفكوك $(أ + ب)^{ن}$ متساويين فإن قيمة ن = ...

(٢) رتبة المصفوفة $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & -١ \\ ٠ & -١ & -١ \\ ١ & ١ & ١ \end{pmatrix}$ تساوى = ...

(٣) إذا كان ج (١، ٠، ٠) ب (،، ١، ١) يتميان للمستوى ك س + ص + م ع + ٢ = ٠ فإن ك + م = ...

(٤) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (١، ٠، ٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٢، −١، −٢) فإن $(\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}) \odot (\overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{أ})$ = ...

(٥) مجموعة حل المعادلة $\begin{vmatrix} ٢ & ٣ & أ+١ \\ ٥ & أ-١ & ٠ \\ ٧ & & ٠ \end{vmatrix}$ = ٢٨ هى ....

(٦) إذا كان ${}^{س+ص}ل_٤ = ٣٦٠$ ، $\underline{|٢س + ص} = ٥٠٤٠$ فإن ${}^{ص}ق_{٢س}$ = ...

ثانيًا: أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الثالث:

(١) إذا كانت معاملات الحدود الرابع والخامس والسادس فى مفكوك $(٢س + ص)^{ن}$ تكون متتابعة حسابية أوجد قيمة ن

(٢) كرة مركزها (١، ٢، ١) تمس سطح المستوى س + ص + ع = ١ أوجد معادلة الكرة

السؤال الرابع:

(١) إذا كان $ع_{١} = ١ - \sqrt{٣}\,ت$ ، $ع_{٢}$ = جتا هـ + ت جا هـ ، $ع_{٣} = (جتا \frac{هـ}{٢} - ت جا \frac{هـ}{٢})^{٢}$ ومكان $ع = \frac{ع_{١}ع_{٢}}{ع_{٣}}$ أوجد المقياس والسعة الأساسية للعدد ع ثم أوجد الجذرين التربيعين للعدد ع على ٣ الصورة المثلثية عند $هـ = \frac{\pi}{٦}$

(٢) إبحث إمكانية وجود حل خلاف الحل الصفرى لمجموعة المعادلات الخطية الآتية:

س + ٣ص − ٢ع = ٠ ، س − ٨ص + ٨ع = ٠ ، ٣س − ٢ص + ٤ع = ٠

السؤال الخامس:

(١) بدون فك أثبت أن $\begin{vmatrix} أ^{٢} + ١ & أب & أجـ \\ أب & ب^{٢} + ١ & جـ ب \\ أجـ & جـ ب & جـ^{٢} + ١ \end{vmatrix} = أ^{٢} + ب^{٢} + جـ^{٢} + ١$

(٢) إذا قطع المستوى ٢س − ص − ٢ع + ١٢ = ٠ الكرة $(س + ٣)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} + (ع - ١)^{٢} = ١٥$ أوجد مساحة المقطع الناتج

تقييم أداء الطالب فى الرياضيات

توجيهات لإنشاء وتطوير نظام تقييم موثوق به:

إن إنشاء وتطوير نظام تقييم موثوق به هو عملية مستمرة. تظهر بعض أدوات التقييم، منذ الوهلة الأولى، مناسبة جدًّا للمعلم ولطلابه، وتظهر أدوات أخرى جودة وفعالية بعد أن تتاح للمعلم فرصة تجريبها وتحسينها، وفى الوقت نفسه هناك أدوات غير صالحة لمستوى ما ولموقف تعليمى معين.

وهنا نضع بين أيدى زملائنا المعلمين بعض التوجيهات التى قد تكون مفيدة عند اختيار نماذج التقييم لبرنامج ما.

استخدام نموذج التقييم الذى يحقق أهدافك بحيث:

- يؤمن مراجعة لطرق التعليم التى استخدمتها، ويعطيك الدلائل التى تستفيد منها فى إعادة النظر وتعديل محتوى وسرعة عملية التعليم.
- يؤمن للطالب تأكيدًا لنجاحة في مجال ما، بالإضافة إلى تحديد التحسين المطلوب في مجالات أخرى.
- تؤمن نظم التقييم المتعارف عليها نتائج واقعية ملموسة.

اجعل من عملية التقييم خبرة إيجابية للطلاب وذلك من خلال:

- استخدام أساليب منوَّعة للتقييم.
- توفير فرص للطلاب يعرضون فيها إمكاناتهم الرياضية في جو يسمح بالأداء الأفضل.
- التركيز على ما يعرفه الطلاب ويتقنونه، لا على ما لا يعرفونه أو يتقنونه.
- حفز الطلاب على التحصيل بوضعهم أمام مهام تعكس قيمة جهودهم.

استخدام تقييم الأداء في التركيز على مهارات التفكير العليا، وذلك من خلال:

- التركيز على تقييم الأداء الذى يصور الطالب مفكرًا ناقدًا وحالا للمسائل.
- تحديد كيفية تعامل الطالب مع الرياضيات، لا كيفية حل المسائل فقط.

قدم الأنشطة التقويمية التى تشبه المهام اليومية، وذلك من خلال:

استخدام الأنشطة التقويمية التى تشبه المهام اليومية، وذلك من خلال:

- استخدام أنشطة متشابهة للأنشطة التدريسية فى عمل التقييم.
- استخدام الأنشطة التقويمية في تأكيد التعليم.
- تقديم التغذية الراجعة التفصيلية الفورية التى يحتاج إليها الطلاب لتأكيد عمليات التعلم.

أشرك كل طالب في عمليات التقييم، وذلك من خلال:

- تشجيع الطلاب على عرض أعمالهم.
- تشجيع الطلاب على المشاركة في تحقيق الأهداف.

استطلاع رأى الطالب

لكل عبارة من العبارات التالية ضع علامة (✓) أسفل الخانة التى تصف إحساسك.

العبارة	معظم الوقت	بعض الوقت	نادرًا ما يحدث
أتقدم بشكل ملحوظ فى مادة الرياضيات.			
احتاج إلى المساعدة فى حل كثير من المسائل.			
الرياضيات لها فائدة في جميع المواقف الحياتية			
أفهم المسائل اللفظية			
أستطيع حل معظم المسائل			
أفضِّل تجريب استراتيجيات جديدة في حل المسائل			
أصاب بالإحباط بسهولة من دراسة الرياضيات			
لدى دفتر منظم لمادة الرياضيات			
أعتقد أن الرياضيات ممتعة			

صف مشروعًا تفضِّل أن يعمل به الفصل. ما نوع الرياضيات المفضلة لديك؟ ولماذا؟

اكتب قائمة ببعض الأنشطة التى مارستها خارج المدرسة، واستخدمت فيها الرياضيات.

تقييم ذاتى لعمل الفريق:

أسماء الفريق: ....

اقرأ جيدًا كل عبارة من العبارات التالية، ثم أعط التقدير (٤) لمجموعتك إذا كنت توافق على العبارة، والتقدير (٣) إذا كنت توافق إلى حدٍّ ما، والتقدير (٢) إذا كنت لا توافق إلى حدًّ ما، والتقدير (١) إذا كنت لا توفق، واستخدم (غ م) وتعنى غير ملائم إذا كانت العبارة لا تنطبق على هذا الموقف. حوِّط استجابة واحدة لكل وصف لمجموعتك.

العبارات	موافق	موافق إلى حد ما	غير موافق إلى حد ما	غير موافق	غير ملائم
أعضاء المجموعة					
أنجزوا المهام المكلفين بها.	٤	٣	٢	١	غ م
فهموا جيدًا الغرض من المهمة	٤	٣	٢	١	غ م
فهموا جيدًا حل المهمة	٤	٣	٢	١	غ م
استمعوا جيدًا إلى كل من الأفكار الأخري.	٤	٣	٢	١	غ م
قدموا تغذية راجعة لذوى الأفكار المشوشة.	٤	٣	٢	١	غ م
تعاونوا في تجهيز العمل الذى تم تجميعة.	٤	٣	٢	١	غ م
استقوا تكليفاتهم من اليوم السابق.	٤	٣	٢	١	غ م
عرضوا أفكارهم على المجموعة.	٤	٣	٢	١	غ م
تفاهموا مع بعضهم البعض عند الحاجة.	٤	٣	٢	١	غ م

من خلال العمل مع فريق، تعلمت ....

سجل عمل الفريق

أسماء الفريق:

لكل فريق عمل سجِّل التاريخ، والمهمة التى كلفوا بها، وأرقام الصفحات، ثم صف عمل أعضاء الفريق معًا للوصول إلى حل جماعى للمهمة التى كلفوا بها . اذكر أى طرق أو أساليب وجدتها مفيدة لإنجاز المهمة.

التاريخ	المهمة	وصف عمل الفريق

التقييم الذاتى للطالب

المهمة:

اكتب عمّا قمت بإنجازه.

مال الذى حاولت تعلُّمه؟ كيف بدأت عملك؟ مال الأدوات التى كنت في حاجة إليها؟ ما الذى تعلمته؟

ضع علامة (✓) أمام العبارات التى تصف طريقة عملك.

خطَّطت قبل البدء في العمل. كنت قادرًا على إجراء هذا العمل.

خبراتى في الرياضيات

الرياضيات التى أفضِّلها:

مهارات الرياضيات التى أتقنتها وأستطيع استخدامها:

المكافآت التى حصلت عليها في الرياضيات:

الأهداف التى أريد تحقيقها في مجال دراسة الرياضيات:

مهارات الرياضيات التى أحتاج إلى مزيد من التمرين عليها:

تقييم الأداء في حل المسائل

ضع علامة (✓) أسفل العمود المناسب والذى يصف بدقة عمل الطالب:

	فى معظم الأحيان	بعض الأحيان	أبدًا
افهم			
يقرأ المسألة بعناية.	....	....	....
يدرس أى جدول أو أي رسم بيانى.	....	....	....
يستطيع أن يصوغ المسألة من جديد وبطريقته وعباراته الخاصة.	....	....	....
يستطيع فهم وإدراك المعلومات المعطاة.	....	....	....
يستطيع فهم وإدراك السؤال الذى يجب الإجابة عنه.	....	....	....
خطط			
يختار الخطة الأنسب لحل المسألة.	....	....	....
يقدر الإجابة الصحيحة.	....	....	....
حل			
يعمل وفق منهجية معينة.	....	....	....
يعرض الحل بطريقة منظمة ومنطقية.	....	....	....
يحسب بطريقة صحيحة.	....	....	....
يعطى الإجابة بجملة كاملة صحيحة، مراعيًا الوحدات.	....	....	....
تحقق			
يتحقق من معقولية الإجابة.	....	....	....
يجرب طرقًا أخرى لحل المسألة.	....	....	....
اتجاه			
يظهر استعدادًا لمحاولة حل المسألة.	....	....	....
يظهر ثقة بالنفس.	....	....	....
محاولات خاطئة لحل المسألة.	....	....	....

تعليقات أخرى

التقييم المستمر: حل المسائل

التاريخ: ....

قدر كل بند بـ:

- ++ إذا كان ممتازًا
- + إذا كان جيدًا.
- ✓ إذا كان مقبولًا
- − بحاجة إلى التطوير
- غ.ت. غير قابل للتطبيق.

	يقرأ المسألة بعناية.	يدرس الصور والجداول والتمثيلات البيانية.	يستطيع إعادة صياغة المسألة بأسلوبه الخاص.	يستطيع تحديد المعلومات	يستطيع تحديد الأسئلة التي تتطلب الإجابة عنها	يختار الخطة المناسبة.	يقدر ما ستكون عليه الإجابة	يعمل بانتظام	يكتب الحل بطريقة منظمة.	يجرى العمليات الحسابية بدقة.	يكتب الإجابة في جملة كاملة مع ذكر الوحدات الصحيحة.	يتحقق من صحة الإجابة ومعقوليتها.	يجرى طرقًا أخرى للحل.
١-													
٢-													
٣-													
٤-													
٥-													
٦-													
٧-													
٨-													
٩-													
١٠-													
١١-													
١٢-													
١٣-													
١٤-													
١٥-													
١٦-													
١٧-													
١٨-													
١٩-													
٢٠-													
٢١-													
٢٢-													
٢٣-													
٢٤-													
٢٥-													
٢٦-													
٢٧-													
٢٨-													

التقييم المستمر: الملاحظة

التاريخ: ....

قدر كل بند بـ:

++ إذا كان ممتازًا

+ إذا كان جيدًا.

✓ إذا كان مقبولًا

– بحاجة إلى التطوير

غ. ت. غير قابل للتطبيق.

	يظهر معرفة بالمهارات	يدرك المفاهيم	يعمل بترتيب ونظام	يعمل بنجاح مع الآخرين	يظهر مواقف إيجابية	يحترم أفكار الغير ويستخدمها	يظهر صبرًا ومثابرة	يطلب المساعدة عند الحاجة	يستخدم الوقت بإنتاجية	يجرى طرقًا أخرى للحل
١-										
٢-										
٣-										
٤-										
٥-										
٦-										
٧-										
٨-										
٩-										
١٠-										
١١-										
١٢-										
١٣-										
١٤-										
١٥-										
١٦-										
١٧-										
١٨-										
١٩-										
٢٠-										
٢١-										
٢٢-										
٢٣-										
٢٤-										
٢٥-										
٢٦-										
٢٧-										
٢٨-										

التقييم المستمر: التعلم التعاونى

التاريخ: ....

قدر كل بند بـ:

++ إذا كان ممتازًا

+ إذا كان جيدًا.

✓ إذا كان مقبولًا

− بحاجة إلى التطوير

غ. ت. غير قابل للتطبيق.

	يظهر قدرة على حل المسائل	يعمل بانتظام	يعمل مع آخرين في الفريق	يوجه ويساعد آخرين	يحترم آراء الآخرين ويستخدمها	يتكلم بهدوء	يطرح أسئلة	يظهر ميولًا إيجابية	يظهر صبرًا ومثابرة	يظهر عدم موافقة دون اشمئزاز
١-										
٢-										
٣-										
٤-										
٥-										
٦-										
٧-										
٨-										
٩-										
١٠-										
١١-										
١٢-										
١٣-										
١٤-										
١٥-										
١٦-										
١٧-										
١٨-										
١٩-										
٢٠-										
٢١-										
٢٢-										
٢٣-										
٢٤-										
٢٥-										
٢٦-										
٢٧-										
٢٨-										

التقيم الفردى من خلال الملاحظة

	دائمًا	أحيانًا	أبدًا
الفهم			
يظهر معرفة بالمهارات.	....	....	....
يدرك المفاهيم.	....	....	....
يختار الخطة المناسبة للحل.	....	....	....
يحل المسائل بدقة.	....	....	....
عادات العمل			
يعمل بطريقة منظمة.	....	....	....
يعمل بنظافة.	....	....	....
يقدم العمل في الوقت المحدد.	....	....	....
يعمل مع الآخرين بتناغم.	....	....	....
يستخدم الوقت بفاعلية وإنتاجية.	....	....	....
يطلب المساعدة عند الحاجة.	....	....	....
الثقة بالنفس	....	....	....
يبادر بتوجيه الأسئلة.	....	....	....
إيجابى التوجيه والسلوك.	....	....	....
يساعد الآخرين.	....	....	....
المرونة			
يجرب طرقًا أخرى.	....	....	....
يحترم ويستخدم أفكار الآخرين.	....	....	....
يستخدم الرياضيات الذهنية والتقدير.	....	....	....
يستخدم الآلات الحاسبة والتقنيات الأخرى.	....	....	....
المثابرة			
يظهر صبرًا ومثابرة.	....	....	....
يعمل وفق منهجية معينة.	....	....	....
يظهر استعدادًا للمحاولة والتجربة.	....	....	....
يتأكد من صحة عمله دون أن يطلب منه.	....	....	....

التقييم العام للطالب:

التاريخ: ....

قدر كل بند بـ:

++ إذا كان ممتازًا

+ إذا كان جيدًا.

✓ إذا كان مقبولًا

− بحاجة إلى التطوير

غ.ت. غير قابل للتطبيق.

	حل المسائل	التعلم التعاوني	الكتابة في الرياضيات	نشاط غرفة الفصل	الواجبات المنزلية	المشاركة في المناقشة	درجات الاختبارات القصيرة	درجات الامتحانات		
١-										
٢-										
٣-										
٤-										
٥-										
٦-										
٧-										
٨-										
٩-										
١٠-										
١١-										
١٢-										
١٣-										
١٤-										
١٥-										
١٦-										
١٧-										
١٨-										
١٩-										
٢٠-										
٢١-										
٢٢-										
٢٣-										
٢٤-										
٢٥-										
٢٦-										
٢٧-										
٢٨-										

قائمة المراجعة/عرض المشروع

يمكن أن يستخدم هذا النموذج لتقييم مشروع ما مقدم من قبل طالب واحد أو من مجموعة طلاب شفهيًّا أو كتابة، كما أنه من الممكن أن يستخدم لمناقشة طرق ناجحة لتقديم أى مادة، ومن المفيد أن يقدم للطلاب لإرشادهم فى التخطيط لأى مشروع في فن الرياضيات أو التجارب العلمية، أو تجميع البيانات لعمل الجداول والرسوم البيانية، أو عروض حاسوبية، أو مسرحيات هزلية قصيرة، أو أى مشروع بحثى سواء أكان شفهيًّا أم مكتوبًا.

الطالب/ الطلاب: ....

المشروع: ....

المشروع

يعرض مفهومًا رياضيًا بشكل جيد.

يتواصل مع الأفكار الرياضية بوضوح.

يربط مع مواد أخرى.

يظهر الوقت الذى انقضى عليه تخطيطًا وتحضيرًا.

هو أصيل و/ أو مبدع.

هو نابض بالحياة ونظيف.

يثير المزيد من الاستقصاءات حول الموضوع.

يتضمن تقريرًا مكتوبًا.

يذكر المواد المستخدمة.

يظهر توزيع المهام التى كلفت بها مجموعة الطلاب.

قدر كل بند بـ:

++ إذا كان ممتازًا

+ إذا كان جيدًا.

✓ إذا كان مقبولًا

− بحاجة إلى التطوير

غ.ت. غير قابل للتطبيق.

التقويم الشفهى

يظهر معرفة للمفهوم الرياضى

منظم: يتضمن مقدمة ومضمونًا وخاتمة.

يستخدم الوسائل السمعية/ البصرية عند الحاجة وفى الوقت المناسب.

يتكلم بوضوح ويضبط التقويم بما يناسب من سرعات.

يجيب عن الأسئلة ويثير مزيدًا من الاهتمام بالموضوع.

يظهر ميلًا وتوجهًا إيجابيين لحل المسائل.

يذكر الموارد المستخدمة.